

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU



**Fakultet elektrotehnike, računarstva
i informacijskih tehnologija Osijek**



Tomislav Barić

Numerički proračuni u elektrotehnici

Priručnik za laboratorijske vježbe

Prvo izdanje

Osijek, 2026.

**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I
INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA OSIJEK**

Tomislav Barić

**Numerički proračuni u elektrotehnici
Priručnik za laboratorijske vježbe**

Prvo izdanje

Osijek, 2026.

Izdavač

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek

Za izdavača

prof. dr. sc. Tomislav Matić

Autor:

prof. dr. sc. Tomislav Barić

Recenzenti:

prof. dr. sc. Hrvoje Glavaš
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek
prof. dr. sc. Mirko Karakašić
Sveučilište u Slavonskom Brodu, Strojarski fakultet

Urednik:

prof. dr. sc. Tomislav Barić
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek

Lektorica:

izv. prof. dr. sc. Dragana Božić Lenard
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek

Grafička priprema i tisak:

FERIT, Osijek

Priručnik je tiskan u digitalnom obliku u svibnju 2026. godine.

ISBN: 978-953-8184-10-9

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku



Suglasnost za izdavanje ovog sveučilišnog priručnika donio je Senat Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku na 7. sjednici u akademskoj godini 2025./2026. održanoj 29. travnja 2026. godine pod brojem 11/26.

Copyright © 2026. Sva autorska prava pridržana. Nijedan dio ovog priručnika ne smije se reproducirati niti prenositi ni u kakvu obliku niti ikakvim sredstvima elektroničkim ili mehaničkim, fotokopiranjem, snimanjem ili umnožavanjem u bilo kojem informatičkom sustavu za pohranjivanje i korištenje bez prethodne suglasnosti vlasnika prava.

Sadržaj

PREDGOVOR	1
1. UVOD	2
2. NUMERIČKE METODE U ELEKTROMAGNETIZMU	4
2.1 Opis elektromagnetskih fenomena i rubni uvjeti	6
2.2 Grafičko predstavljanje domene, granice domene i segmenata granice domene	7
2.3 Dirichletov rubni uvjet	8
Primjer iz elektrostatike: model pločastog kondenzatora	9
2.4 Neumannovi rubni uvjeti	11
Primjer iz elektrostatike: površinski naboj na beskonačnoj vodljivoj ploči	12
2.5 Robinovi rubni uvjeti (mješoviti rubni uvjeti)	14
Primjer iz elektrostatike: dvije beskonačno vodljive ploče od kojih je jedna s kontaktnim otporom	15
2.6 Dijagram toka primjene numeričkih metoda u elektromagnetizmu	18
2.7 Slijed radnji u primjeni metode konačnih elemenata	19
Primjer određivanja električnog otpora vodljivog tijela metodom konačnih elemenata	20
2.8 Naknadna obrada podataka (engl. <i>Post-processing</i>)	31
Popis literature	33
3. ELEKTROSTATIKA	34
3.1 Polje na granici dvaju medija različitih permitivnosti	35
3.2 Električno polje i potencijal u prostoru oko nabijene vodljive kugle	36
3.3 Električno polje i potencijal u prostoru između dvije koncentrične kugle različitih polumjera	39
Odnos jakosti električnog polja kada je prisutna veća kugla i kada je nema	43
Numerički primjer	44
Popis literature	46
Preporučena literatura	46
4. PARAMETRI I MODELI PRIJENOSNOG VODA	47
4.1 Parametri prijenosnog voda	47
4.2 Sekundarni (izvedeni) parametri voda	53
4.3 Određivanje kapaciteta prijenosnog voda	56

4.4	Određivanje međusobnog kapaciteta	56
4.5	Utjecaj zemlje na kapacitet prijenosnog voda, određivanje kapaciteta prema zemlji (dozemni kapacitet).....	60
4.6	Pogonski kapacitet jednofaznog nadzemnog voda	64
4.7	Pogonski kapacitet trofaznog nadzemnog voda	65
	Numerički primjer	66
	Popis literature	69
5.	UZEMLJIVAČI	70
5.1	Osnovni pojmovi i definicije	70
	Opis fenomena	71
	Napon dodira	71
	Napon koraka	72
5.2	Modeliranje uzemljivača	73
	Primjer modeliranja uzemljivača kvazistatičkim modelom	74
	Razdioba skalarnog električnog potencijala na površini tla	81
	Otpor rasprostiranja uzemljivača	83
	Vertikalni štapni (cjevasti) uzemljivač	84
	Paralelno spojeni vertikalni štapni uzemljivači	86
	Otpor rasprostiranja dvaju paralelno spojenih vertikalnih cijevi	87
	Popis literature	92
6.	GALVANSKE METODE MJERENJA OTPORNOSTI TLA	93
6.1	Električna otpornost tla	93
6.2	Galvanske metode mjerenja električne otpornosti tla	93
6.3	Prividna otpornost tla	95
6.4	Strujno polje i polje skalarnog električnog potencijala u tlu	96
	Primjer mjerenja otpornosti tla Wennerovom metodom: model jednoslojnog tla	98
6.5	Dvoslojno tlo i Wennerova metoda mjerenja otpornosti tla	103
	Popis literature	108
7.	MODELIRANJE ELEKTROMAGNETSKIH ZADAĆA PROGRAMSKIM PAKETOM ANSYS	109
8.	POLJE I POTENCIJAL U PROSTORU OKO NABIJENE KUGLE	110
	Analiza rezultata	132

9. MODELIRANJE UZEMLJIVAČA	134
Analiza rezultata	164
10. MODELIRANJE WENNEROVE METODE	165
Analiza rezultata	217
POPIS KORIŠTENIH OZNAKA, KRATICA I SIMBOLA	218

PREDGOVOR

Višegodišnjim iskustvom u organiziranju i održavanju nastave na kolegijima *Osnove elektrotehnike*, *Osnove elektrotehnike I i II* i *Numeričkih metoda u elektromagnetizmu*, autor je uvidio potrebu za novim priručnikom za laboratorijske vježbe na računalu primjenom modernih programskih paketa za modeliranje i analizu elektromagnetskih zadaća. U skladu s navedenim napisan je ovaj priručnik. Od ovog se priručnika očekuje da je sadržajno prilagođen samostalnoj pripremi studenata za laboratorijske vježbe na računalu u svrhu osposobljavanja studenata za rad u programskom paketu Ansys Electronics.

Prilikom pisanja ovog priručnika, autor je nastojao podijeliti priručnik na tematske cjeline koje sadržajno obuhvaćaju temeljna znanja specifičnih tema iz kolegija *Osnove elektrotehnike II* i kolegija *Numeričke metode u elektromagnetizmu*. Svaka tematska cjelina daje detaljnu teorijsku podlogu za odabrane primjere korištenja programskog paketa Ansys Electronics. Pri izlaganju teorije obilato su korišteni brojni grafički prikazi kako bi usvajanje izložene teorije bilo olakšano. Pri izboru tematskih cjelina nastojalo se odabrati teme koje su od posebnog interesa na sveučilišnom diplomskom studiju elektroenergetike. U odabranim primjerima korištenja programskog paketa Ansys Electronics dane su preslike zaslona svih kritičnih koraka pri upotrebi programskog paketa Ansys Electronics. Navedeni pristup omogućava studentima samostalno pripremanje za laboratorijske vježbe i njihovu učinkovitu provedbu. Želja je autora da ovaj priručnik ima i ulogu pomagala studentima pri izradi završnih i diplomskih radova s temama i zadacima koje obuhvaćaju korištenje programskog paketa Ansys Electronics.

Autor

prof. dr. sc. Tomislav Barić

1. UVOD

U odnosu na tradicionalne metode dizajna, analize, sinteze i razvoja proizvoda, upotreba modernih programskih paketa zasnovanih na numeričkim metodama u elektromagnetizmu, među kojima se posebno ističe metoda konačnih elemenata (MKE) (engl. *Finite element method*, (FEM)) imaju brojne prednosti. Istaknute prednosti korištenja modernih programskih paketa zasnovanih na numeričkim metodama u elektromagnetizmu ogledaju se u poboljšanju i optimizaciji dizajna, boljoj pouzdanosti sustava, boljem saznanju o kritičnim parametrima sustava, skraćivanju vremenskog intervala od ideje do konačnog proizvoda te optimizaciji proizvodnog procesa. Za uspješnu primjenu programskih paketa zasnovanih na numeričkim metodama u elektromagnetizmu potrebno je određeno iskustvo korisnika programskog paketa. U tu svrhu, za stjecanje osnovnih znanja i vještina korištenja programskog paketa Ansys Electronics napisan je ovaj priručnik. Priručnik je podijeljen u deset poglavlja čiji je sadržaj opisan kako sljedi.

Drugo poglavlje daje osvrt na numeričke metode u elektromagnetizmu i rubne uvjete. Posebna je pažnja usmjerena na metodu konačnih elemenata i važnijih koraka u njezinoj praktičnoj primjeni. Za lakše razumijevanje metode konačnih elemenata, na primjeru jednostavne elektromagnetske zadaće dan je numerički primjer s važnijim koracima u primjeni metode konačnih elemenata.

Treće poglavlje obuhvaća osnove teorije iz elektrostatike. Na dobro poznatim i lako razumljivim primjerima čitatelja se upoznaje s postupkom rješavanja jednostavnih elektrostatskih zadaća u svrhu određivanja el. potencijala i el. polja te primjene rubnih uvjeta.

Četvrto poglavlje daje osnovnu teoriju o parametrima i modelima prijenosnog voda. Izlaganje je započeto s primarnim parametrima prijenosnog voda i modelom prijenosnog voda kojime se mogu uvažiti valni fenomeni na vodu. Koristeći se modelom prijenosnog voda kojime se mogu uvažiti valni fenomeni na prijenosnom vodu izvedene su (u vremenskom i frekvencijskom području) jednadžbe koje opisuju kretanje naponskih i strujnih valova duž prijenosnog voda (tzv. telegrafске jednadžbe). U nastavku izlaganja opisani su sekundarni (izvedeni) parametri voda. Izlaganje završava s primjerima određivanja međusobnog kapaciteta, kapaciteta prema zemlji (dozemnog kapaciteta) i pogonskog kapaciteta.

Peto poglavlje izlaže osnovna znanja o uzemljivačima i njihovom modeliranju. Prikazan je postupak određivanja fizikalnih veličina kao što su napon dodira, napon koraka i otpor rasprostiranja uzemljivača. Posebna pažnja posvećena je utjecaju dimenzija domene na točnost numeričkog proračuna pri predstavljanju po prirodi beskonačne domene (tla) s domenom konačnih dimenzija. U svrhu boljeg razumijevanja teorijskog izlaganja dani su numerički primjeri određivanja otpora rasprostiranja vertikalnih cjevastih uzemljivača.

Šesto poglavlje daje temeljna znanja o galvanskim metodama mjerenja električne otpornosti tla. Posebna pažnja pridijeljena je Wennerovoj metodi mjerenja električne otpornosti tla. Korištenjem metode odslikavanja izvedeni su izrazi za prividnu otpornost dvoslojnog tla dobivenu mjerenjem Wennerovom metodom.

Sedmo poglavlje daje osvrt na zadatak i sadržaj vježbi kojima je pokazano modeliranje odabranih elektromagnetskih zadaća programskim paketom Ansys Electronics. Sve vježbe oslanjaju se na teoriju iznesenu u teorijskom dijelu priručnika, odnosno, od drugog do šestog poglavlja.

Osmo poglavlje u cijelosti se odnosi na vježbu pod nazivom „Polje i potencijal u prostoru oko osamljene nabijene kugle“. Na odabranom primjeru prikazani su važniji koraci pri upotrebi programskog paketa Ansys Electronics u određivanju otpora električnog polja i skalarnog električnog potencijala u prostoru oko nabijene kugle.

Deveto poglavlje u cijelosti se odnosi na vježbu pod nazivom *Modeliranje uzemljivača programskim paketom Ansys*. Na odabranom primjeru prikazani su važniji koraci pri upotrebi programskog paketa Ansys Electronics u određivanju otpora rasprostiranja uzemljivača i skalarnog električnog potencijala na površini tla.

Deseto poglavlje u cijelosti se odnosi na vježbu pod nazivom *Modeliranje Wennerove metode programskim paketom Ansys*. Na praktičnom primjeru, korištenjem programskog paketa Ansys Electronics, prikazano je modeliranje mjerenja prividne otpornosti dvoslojnog tla Wennerovom metodom.

2. NUMERIČKE METODE U ELEKTROMAGNETIZMU

Numeričke metode (engl. *Numerical methods*) tehnike su aproksimacije procesa i pojava opisanih integralnim, diferencijalnim ili nelinearnim jednažbama [1-3]. Numeričke su metode skup algoritama koji se koriste za rješavanje fizikalnih zadata preslikanih u matematičke zadatke koje se ne mogu riješiti točno analitički i u slučajevima kada bi dobivanje točnog rješenja bilo previše složeno ili nepraktično. Iako su po svojoj prirodi numeričke metode tehnike aproksimacije, može se steći pogrešan dojam da one daju manje točne rezultate u slučajevima kada se fenomeni mogu opisati analitičkim izrazima. Naime, u brojnim slučajevima kada postoje analitički izrazi kojima su opisani fenomeni, oni su često dobiveni pod određenim pretpostavkama i fizikalnim pojednostavljenjima kako bi se moglo ishoditi analitičko rješenje. Na primjer, električno polje u prostoru oko beskonačno dugog ravnog vodiča. Radi navedenog, iako postoji točno (egzaktno) analitičko rješenje pojedinih fenomena, ono zbog uvedenih pretpostavki i fizikalnih pojednostavljenja može davati manje točne rezultate, negoli što bi se dobili primjenom odgovarajuće numeričke metode. Ukratko, numeričke metode daju vrlo dobre aproksimacije rješenja. Stoga, numeričke metode omogućuju izradu realističnijih matematičkih modela fizikalne stvarnosti od analitičkih metoda. U daljnjem tekstu fokus će biti na numeričke metode u elektromagnetizmu [2, 3].

Numeričke metode u elektromagnetizmu najčešće klasificiramo s obzirom na to kako je polje formulirano [4-10].

Metode zasnovane na diferencijalnoj formulaciji polja

- Metoda konačnih elemenata, akronim MKE, (engl. *Finite element method*, (FEM)).
- Metoda konačnih razlika, akronim MKR, (engl. *Finite-difference methods*, (FDM)).
- Metoda konačnih volumena, akronim MKV, (engl. *Finite volume method* (FVM)).
- Metoda linija, akronim ML, (engl. *Method of lines* (MOL)).

Metode zasnovane na integralnoj formulaciji polja

- Metoda momenata, akronim MM, (engl. *Method of moments*, (MoM)), koristi se i naziv:
- Metoda graničnih elemenata, akronim MGE, (engl. *Boundary element method*, (BEM)).

S obzirom da je fokus ovog priručnika na korištenju programskog paketa Ansys Electronics koji koristi metodu konačnih elemenata, koja se zasniva na diferencijalnoj formulaciji polja, fokus će biti usmjeren na diferencijalni opis elektromagnetskih zadaća i metodu konačnih elemenata.

Programski alati zasnovani na metodi konačnih elemenata postali su sastavni dio dizajna i razvoja brojnih inženjerskih sustava različitih industrija. Odabrani primjeri [4-10]:

- **Zrakoplovna i svemirska industrija** (engl. *Aerospace industry*), primjeri: letjelice, aerodinamika, aerotermodinamika, pogonski sustavi i letne performanse.
- **Automobilska industrija** (engl. *Automotive industry*), optimizacija dizajna, analiza performansi, analiza sigurnosti (simulacija sudara i crash testovi, simulacija rada zračnih jastuka), analiza naprezanja i deformacija, analiza zvuka, zvučnog sustava i buke, analiza vibracija i rezonancije, analiza hlađenja, simulacija i optimizacija rada ovjesa i optimizacija komponenti.
- **Električna industrija i energetika** (engl. *Electrical industry*), primjeri: transformatori, električni motori, generatori, releji, rastavljači, sklopke, prekidači, vodovi, kabeli, itd.)
- **Elektronička industrija** (engl. *Electronics industry*) primjeri: integrirani krugovi, elektromagnetska kompatibilnost, tiskane pločice.
- **Industrija komunikacijskih uređaja** (engl. *Communication device industry*), primjeri: antene, djelitelji snage, interakcija struktura s elektromagnetskim valovima, prilagođivači impedancija, valovodi, rezonatori, koaksijalni kabeli, itd.
- **Industrija proizvodnje električne energije** (engl. *Power generation industry*), primjeri: nuklearna, termo, hidro, dinamika fluida u cijevima, itd.
- **Gradevinska industrija** (engl. *Construction industry*), primjeri: statički i dinamički proračuni.
- **Medicinska industrija**, (engl. *Healthcare industry*), primjeri: implantati, interakcija uređaja s ljudskim tijelom, simulacijama interakcije između materijala i ljudskog tijela biomehaničke analize, razvoj novih tretmana, itd.

2.1 Opis elektromagnetskih fenomena i rubni uvjeti

U svim znanstvenim područjima, prirodnih (fizika, kemija) i tehničkih znanosti (elektrotehnika, strojarstvo) te užih specijalizacija (znanstvenih grana) postoje postulirani zakoni, tj. temeljne tvrdnje koje se ne dokazuju, nego prihvaćaju kao početne istine, na temelju kojih se gradi teorija (npr. zakon očuvanja energije, brzina je svjetlosti ista u svim inercijskim sustavima, Newtonovi zakoni gibanja). Postulirani zakoni, kao i izvedeni zakoni, mogu se iskazati odgovarajućim matematičkim izrazima. U elektromagnetizmu, elektromagnetske fenomene opisujemo **skupom Maxwellovih jednadžbi**. Maxwellove jednadžbe opisuju **makroskopske fenomene** u elektromagnetizmu skupom jednadžbi koje dolaze u dvama oblicima - diferencijalnom obliku i integralnom obliku [2, 11, 12]. Jedan takav sažet prikaz Maxwellovih jednadžbi za vakuum dan je u tablici 2.1 [2, 11, 12].

Tablica 2.1. Sažeti prikaz Maxwellovih jednadžbi u SI jedinicama.

Diferencijalni oblik	Integralni oblik
$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot dV$
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A \mu_0 \cdot \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \int_A \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A}$

Neovisno o tome kojim je skupom jednadžbi (diferencijalnom ili integralnom) određena neka elektromagnetska zadaća opisana, kako bi se dobilo jedinstveno rješenje, potrebno je postaviti i takozvane **rubne uvjete** (engl. *Boundary conditions*, akronim BC) [13-16].

Rubni su uvjeti ograničenja (engl. *Constraints*) neophodna za rješenje problema rubnih vrijednosti (engl. *Boundary value problem*). Rubne uvjete možemo smatrati kao **dodatne informacije** o tome kakvo je vladanje sustava na rubovima prostora u kojem se nešto događa [13-16].

Vrste rubnih uvjeta

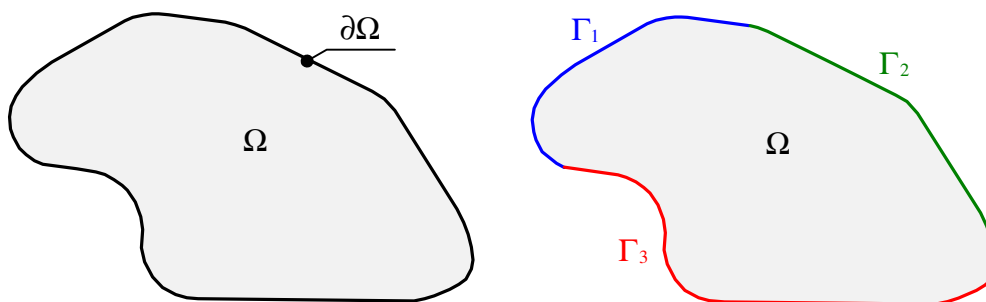
Obične i parcijalne diferencijalne jednadžbe zahtijevaju uvažavanje rubnih uvjeta. Na granici domene mogu se postaviti različite vrste rubnih uvjeta. Izbor rubnog uvjeta važan je za rješenje računskog problema. Na primjer, loše odabrani rubni uvjeti mogu dovesti do divergencije rješenja ili do konvergencije pogrešnog rješenja.

Postoje **četiri** vrste rubnih uvjeta, a to su:

- **Dirichletov rubni uvjet** (izgovor „Dirihletov rubni uvjet“),
- **Neumannov rubni uvjet** (izgovor „Noimanov rubni uvjet“),
- **Cauchyjev rubni uvjet** (izgovor „Košijev rubni uvjet“),
- **Robinov** (mješoviti) rubni uvjet.

2.2 Grafičko predstavljanje domene, granice domene i segmenata granice domene

Često je pogodno simbolički grafički predstaviti područje prostora (ili vremena) u kojemu se promatra tj. opisuje neka fizikalna pojava ili više njih (fizikalni procesi). Odnosno, u matematičkom smislu, područje definicije funkcije. Također, pogodno je imati dogovorni simbol za domenu, granicu domene i segmenata granice domene. Na slici 2.1. na simbolički je način grafički prikazana domena, oznaka Ω , granica domene, oznaka $\partial\Omega$, segmenti (dijelovi) granice domene, oznake Γ_1, Γ_2 i Γ_3 . Navedeno se matematičkim izričajem kaže i zapisuje na sljedeći način. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domena s glatkom granicom $\partial\Omega$ koja je podijeljena na tri disjunktna dijela te vrijedi: a) ukupna je granica unija svih dijelova: $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, b) dijelovi su granica međusobno disjunktni (ne preklapaju se): $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$.



Slika 2.1 Područje definicije (domena), oznaka Ω i granica domene, oznaka $\partial\Omega$, segmenti (dijelovi) granice domene, oznake Γ_1, Γ_2 i Γ_3 .

Radi boljeg razumijevanja pojedinih vrsta rubnih uvjeta, neka u tu svrhu posluže odabrani primjeri iz elektrostatike.

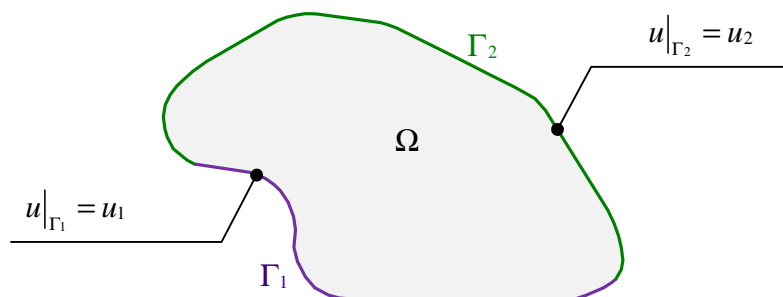
2.3 Dirichletov rubni uvjet

Dirichletov rubni uvjet vrsta je rubnog uvjeta koja je dobila ime po njemačkom matematičaru Johannu Peteru Dirichletu (1805. - 1859.). Dirichletovi rubni uvjeti rubni su uvjeti kod kojih je zadana vrijednost funkcije na rubu (granici) domene. Na primjer, kada se rješava diferencijalna jednadžba, Dirichletov rubni uvjet propisuje vrijednosti koje nepoznata funkcija treba poprimiti duž ruba domene. Na primjer, neka je u rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe nad skupom Ω (domenom) s granicom višečlane glatke funkcije (definirana u dijelovima domene različitim formulama) $\partial\Omega$ koja se sastoji od dvaju dijelova Γ_1 i Γ_2 . Tada je na dijelu Γ_1 primijenjen Dirichletov rubni uvjet u_1 , a na dijelu Γ_2 Dirichletov rubni uvjet u_2 , što se zapisuje na način [11-16]:

$$u|_{\Gamma_1} = u_1, \quad (2-1)$$

$$u|_{\Gamma_2} = u_2. \quad (2-2)$$

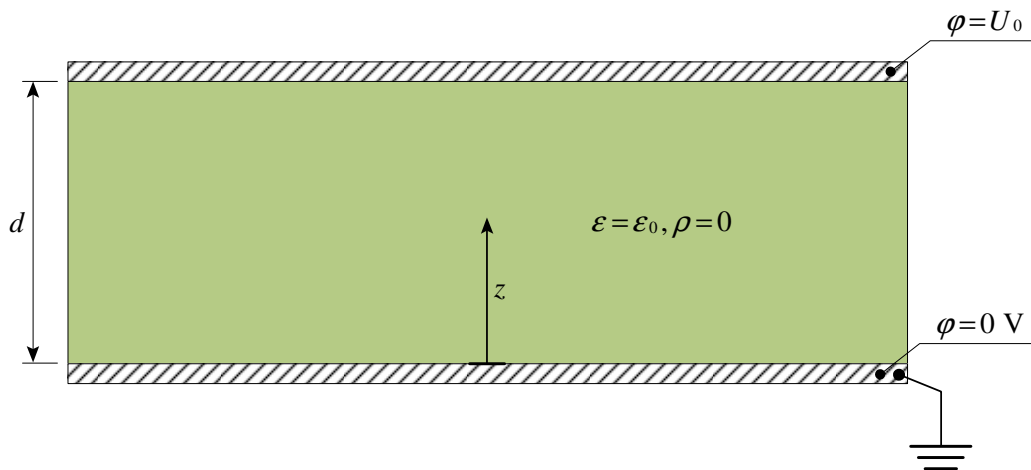
Simbolički prikaz domene i ruba domene podijeljenog na dva dijela Γ_1 i Γ_2 te Dirichletov rubnog uvjeta primijenjenog na segmentima ruba domene može se prikazati na način kako je to prikazano na slici 2.2.



Slika 2.2 Simbolički prikaz domene i ruba domene podijeljenog na dva dijela Γ_1 i Γ_2 te Dirichletovog rubnog uvjeta primijenjenog na dijelu ruba domene označenog zelenom bojom i Dirichletovog rubnog uvjeta primijenjenog na dijelu ruba domene označenog ljubičastom bojom.

Primjer iz elektrostatike: model pločastog kondenzatora

Neka je kondenzator izrađen od dviju velikih, ravnih i paralelnih metalnih ploča razmaknutih na udaljenosti d , kako je prikazano slikom 2.3. Dimenzije su ploča puno veće od razmaka između njih. Neka je gornja ploča kondenzatora na električnom potencijalu $\varphi = U_0$, a donja ploča kondenzatora uzemljena, tj. na potencijalu $\varphi = 0$. Između ploča kondenzatora je zrak te nema slobodnih naboja između ploča ($\rho = 0$). Potrebno je odrediti skalarni električni potencijal i električno polje u prostoru između ploča kondenzatora [11-16].



Slika 2.3 Kondenzator izrađen od dviju velikih, ravnih i paralelnih metalnih ploča.

Rješenje

Kako je navedeno da su prostorne dimenzije ploča puno veće od razmaka između ploča, mogu se zanemariti rubni efekti te se promjena potencijala i električnog polja u prostoru između ploča može smatrati jednodimenzionalnim (problem je 1D u z -smjeru) [11-16].

Skalarni električni potencijal dobiva se rješavanjem Laplaceove jednadžbe ($0 \leq z \leq d$) [11-16]:

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0 \quad (2-3)$$

koja ima opće rješenje oblika [11-16]:

$$\varphi(z) = A \cdot z + B \quad (2-4)$$

gdje su A i B nepoznate konstante koje se određuju iz rubnih uvjeta.

Primjena rubnih uvjeta (Dirihletovi uvjeti) [11-16]:

$$\varphi(0) = 0 \rightarrow A \cdot 0 + B = 0 \rightarrow B = 0, \quad (2-5)$$

$$\varphi(d) = U_0 \rightarrow A \cdot d + 0 = U_0 \rightarrow A = U_0 / d. \quad (2-6)$$

Uvrštavanje dobivenih iznosa konstanti A i B u opće rješenje Laplaceove jednadžbe (izraz (2-4)), za definirane rubne uvjete daje izraz za skalarni električni potencijal duž z osi [11-16]:

$$\varphi(z) = \frac{U_0}{d} \cdot z. \quad (2-7)$$

Promjena skalarnog električnog potencijala između ploča kondenzatora opisana je linearnom funkcijom. Električno polje negativni je gradijent potencijala:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\left(\hat{x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \varphi(x, y, z). \quad (2-8)$$

Odnosno, za 1D slučaj (duž z osi), vrijedi [11-16]:

$$\vec{E} = \vec{E}_z = -\hat{z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{U_0}{d} \cdot z \right) = -\hat{z} \cdot \frac{U_0}{d} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (z) = -\hat{z} \cdot \frac{U_0}{d}. \quad (2-9)$$

Električno je polje konstantne jakosti, a orijentirano je od pozitivne ploče prema uzemljenoj ploči. Smjer električnog polja uzduž je z osi.

2.4 Neumannovi rubni uvjeti

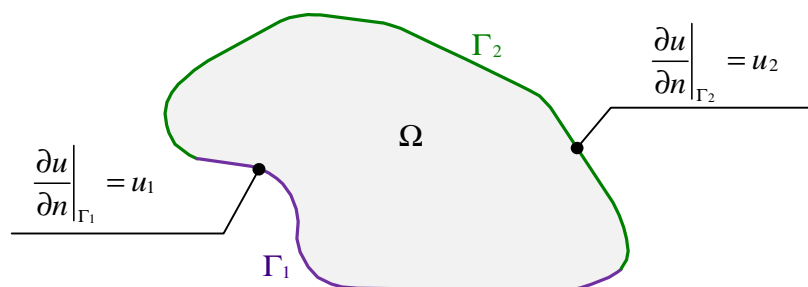
Neumannov rubni uvjet vrsta je rubnog uvjeta koja je dobila ime po njemačkom matematičaru Carlu Neumannu (1832. - 1925.). Kada se ova vrsta rubnog uvjeta primjeni na običnu ili parcijalnu diferencijalnu jednadžbu, tada ovaj rubni uvjet određuje kolika mora biti derivacija funkcije koja je rješenje diferencijalne jednadžbe na rubu (granici) domene. Na primjer, neka je u rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe nad skupom Ω (domenom) s granicom višečlane glatke funkcije $\partial\Omega$ koja je podijeljena u dva dijela Γ_1 i Γ_2 . Na dijelu Γ_1 primijenjen je Neumannov rubni uvjet u_1 , a na dijelu Γ_2 Neumannov rubni uvjet u_2 :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = u_1, \quad (2-10)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = u_2, \quad (2-11)$$

gdje su u_1 i u_2 zadane funkcije definirane na tim dijelovima granice, a n označava normalu na granicu $\partial\Omega$.

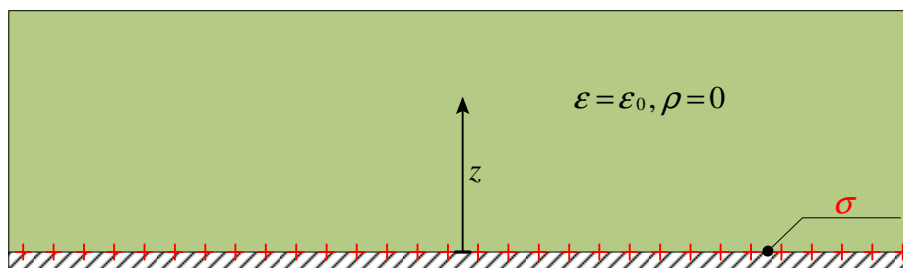
Simbolički prikaz domene i ruba domene podijeljenog na dva dijela Γ_1 i Γ_2 te Neumannovog rubnog uvjeta primijenjenog na segmentima ruba domene može se prikazati na način kako je to prikazano na slici 2.4.



Slika 2.4 Simbolički prikaz domene i ruba domene podijeljenog na dva dijela Γ_1 i Γ_2 te Neumannovog rubnog uvjeta primijenjenog na dijelu ruba domene označenog zelenom bojom i Neumannovog rubnog uvjeta primijenjenog na dijelu ruba domene označenog ljubičastom bojom.

Primjer iz elektrostatike: površinski naboj na beskonačnoj vodljivoj ploči

Neka se beskonačna vodljiva (metalna) ploča nalazi u ravnini $z=0$ te neka je nabijena konstantnom površinskom gustoćom naboja σ (As/m^2) (vidjeti sliku 2.5). Potrebno je odrediti električni potencijal $\varphi(z)$ u prostoru iznad ploče (za $z \geq 0$). U prostoru iznad ploče nema slobodnih naboja ($\rho = 0$), a ploča se nalazi u zraku ($\varepsilon = \varepsilon_0$) [11-16].



Slika 2.5 Beskonačna vodljiva (metalna) ploča nabijena konstantnom površinskom gustoćom naboja σ .

Rješenje

Zbog simetrije, ova je elektromagnetska zadaća jednodimenzionalna (problem je 1D u z -smjeru), tj. sve ovisi o prostornoj varijabli z . S obzirom da iznad ploče nema slobodnih naboja, u prostoru iznad ploče vrijedi Laplaceova jednadžba (za $z \geq 0$) [11-16]:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0 \quad (2-12)$$

koja ima opće rješenje oblika [11-16]:

$$\varphi(z) = A \cdot z + B \quad (2-13)$$

gdje su A i B nepoznate konstante koje se određuju iz rubnih uvjeta. Električno polje ima samo z komponentu te je negativni gradijent potencijala, tj. vrijedi [11-16]:

$$E = E_z = -\frac{d\varphi}{dz}. \quad (2-14)$$

U elektrostatici nabijena vodljiva tijela na svojoj površini imaju samo okomitu komponentu električnog polja, a u ovom slučaju to je komponenta duž z -osi.

Jakost polja na samoj površini nabijenog vodljivog tijela dobiva se iz Gaussovog zakona te je određena izrazom [11-16]:

$$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2-15)$$

gdje je σ površinska gustoća naboja, ϵ_0 permitivnost vakuumu.

Kombiniranje prethodnih dvaju izraza daje Neumannov rubni uvjet na $z = 0$ [11-16]:

$$-\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2-16)$$

Izraz (2-16) može se napisati u obliku:

$$d\varphi = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} dz. \quad (2-17)$$

Integriranje prethodnog izraza daje:

$$\varphi(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot z + B \quad (2-18)$$

gdje je B nepoznata konstanta koja se određuje iz rubnog uvjeta ako je poznat potencijal ploče. Ako nije poznat potencijal ploče, može se proizvoljno uzeti da je ploča na nultom potencijalu, tj. $\varphi(z = 0) = 0$ te je tada

$$\varphi(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot z. \quad (2-19)$$

Zaključak:

Potencijal opada linearno s povećanjem udaljenosti od ploče, a električno je polje konstantno i ima samo z komponentu duž z osi koja je okomita na ravninu u kojoj leži ploča [11-16].

$$\vec{E}_z = -\text{grad}\varphi = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{z}. \quad (2-20)$$

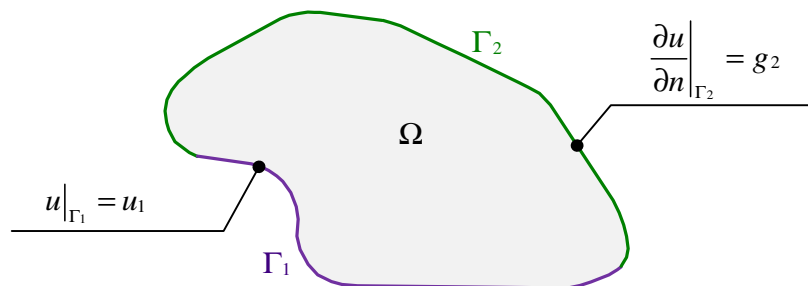
2.5 Robinovi rubni uvjeti (mješoviti rubni uvjeti)

Robinovi rubni uvjet vrsta je rubnog uvjeta koja je dobila ime po francuskom matematičaru Victor Gustave Robin (1855. - 1897.). Robinovi rubni uvjeti nazivaju se i mješovitim rubnim uvjetima jer kombiniraju zadane vrijednosti funkcije na rubu domene i derivacije funkcije na rubu domene. Robinovi rubni uvjeti kombinacija su Dirichletovog i Neumannovog rubnog uvjeta na rubu domene. Na primjer, neka je u rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe nad skupom Ω (domenom) s granicom višechlane glatke funkcije $\partial\Omega$ koja je podijeljena u dva dijela Γ_1 i Γ_2 (Slika 2.6). Na dijelu Γ_1 , primijenjen je Dirichletov rubni uvjet, a na dijelu Γ_2 Neumannov rubni uvjet.

$$u|_{\Gamma_1} = u_1, \quad (2-21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = g_2, \quad (2-22)$$

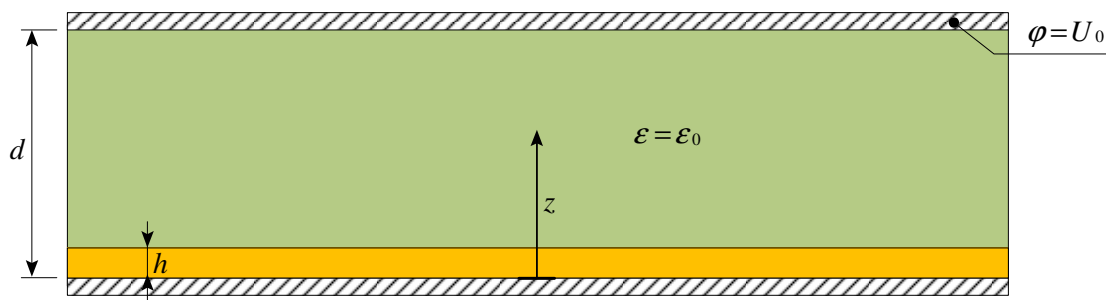
gdje su u_1 i g_2 zadane funkcije definirane na tim dijelovima granice.



Slika 2.6 Simbolički prikaz domene i ruba domene podijeljenog na dva dijela Γ_1 i Γ_2 te Neumannovog rubnog uvjeta primijenjenog na dijelu ruba domene označenog zelenom bojom i Dirichletovog rubnog uvjeta primijenjenog na dijelu ruba domene označenog ljubičastom bojom.

Primjer iz elektrostatike: dvije beskonačno vodljive ploče od kojih je jedna s kontaktnim otporom

Neka su u zraku položene dvije paralelne vodljive (metalne) ploče u z ravnini i razmaknute jedna od druge na udaljenost d , kao što je prikazano slikom 2.7. Skalarni električni potencijal gornje ploče poznat je i iznosi $\varphi = U_0$, a na površini donje ploče, na strani koja gleda prema gornjoj ploči, nalazi se tanki sloj aluminijevog oksida (Al_2O_3) debljine 100 nm i specifične otpornosti $\rho \approx 10^{14} \Omega\text{m}$. Obje ploče nalaze se u zraku, a između njih nema slobodnih naboja [11-15].



Slika 2.7 Dvije beskonačno vodljive ploče od kojih je jedna s kontaktnim otporom.

Rješenje

Kontaktni otpor (engl. *Specific contact resistance or contact resistivity*) uspostavlja vezu između potencijala i normalne komponente polja. Kontaktni otpor računa se izrazom $R = \rho \cdot h$ gdje je ρ specifična otpornost ($\Omega \cdot \text{m}$), a h je debljina sloja (m) [11-15].

$$R = 10^{14} \cdot 10^{-7} = 10^7 \Omega \cdot \text{m}^2. \quad (2-23)$$

Gornja je ploča na poznatom potencijalu te se koristi Dirichletov rubni uvjet. Donja ploča ima površinski sloj oksida s kontaktnim otporom R te se koristi Robinov rubni uvjet. U prostoru između ploča nema slobodnih naboja te se koristi Laplaceova jednadžba. Zbog simetrije, Laplaceova jednadžba u 1D glasi [11-15]:

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \quad (2-24)$$

koja ima opće rješenje oblika [11-15]:

$$\varphi(z) = A \cdot z + B. \quad (2-25)$$

Na gornjoj ploči ($z = d$) vrijedi Dirihletov rubni uvjet [11-15]:

$$\varphi(d) = U_0. \quad (2-26)$$

Na donjoj ploči ($z = 0$) vrijedi Robinov rubni uvjet [11-15]:

$$\varphi(0) + R \cdot \varepsilon_0 \cdot \left. \frac{d\varphi}{dz} \right|_{z=0} = 0. \quad (2-27)$$

Iz općeg rješenja Laplaceove jednadžbe dobiva se [11-15]:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d}{dz} (A \cdot z + B) = A. \quad (2-28)$$

Iz prethodnog izraza proizlazi da vrijedi:

$$\left. \frac{d\varphi}{dz} \right|_{z=0} = A \Big|_{z=0} = A. \quad (2-29)$$

Ujedno, iz izraza $\varphi(z) = A \cdot z + B$, za $z=0$, dobiva se $\varphi(0) = B$. Uvrštavanjem rubnih uvjeta za $z = d$ i $z = 0$ dobiva se:

za $z = d$:

$$A \cdot d + B = U_0, \quad (2-30)$$

za $z = 0$:

$$B + R \cdot \varepsilon_0 \cdot A = 0. \quad (2-31)$$

Iz druge jednadžbe proizlazi da je $B = -R \cdot \varepsilon_0 \cdot A$, što uvršteno u prvu daje:

$$A \cdot d + (-R \cdot \epsilon_0 \cdot A) = U_0. \quad (2-32)$$

Iz prethodnog izraza proizlazi:

$$A = \frac{U_0}{d - R \cdot \epsilon_0} \quad (2-33)$$

te je

$$B = -R \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{U_0}{d - R \cdot \epsilon_0}. \quad (2-34)$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza u opće rješenje za prostornu promjenu potencijala daje [11-15]:

$$\varphi(z) = \frac{U_0}{d - R \cdot \epsilon_0} \cdot z - R \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{U_0}{d - R \cdot \epsilon_0} = \frac{U_0}{d - R \cdot \epsilon_0} (z - R \cdot \epsilon_0). \quad (2-35)$$

Zaključak

Ako je $R=0$, dobiva se $\varphi(z) = U_0 / d$ (izraz 2-7), što je slučaj kod običnog kondenzatora kod kojega su prisutna dva Dirihletova rubna uvjeta. Kada $R \rightarrow \infty$, to odgovara fizikalnoj situaciji u kojoj kontaktni sloj postaje savršeni izolator. Tada električno polje ne može uspostaviti potencijal u sloju u kojemu $R \rightarrow \infty$, odnosno nema normalne komponente polja kroz granicu u kojoj $R \rightarrow \infty$.

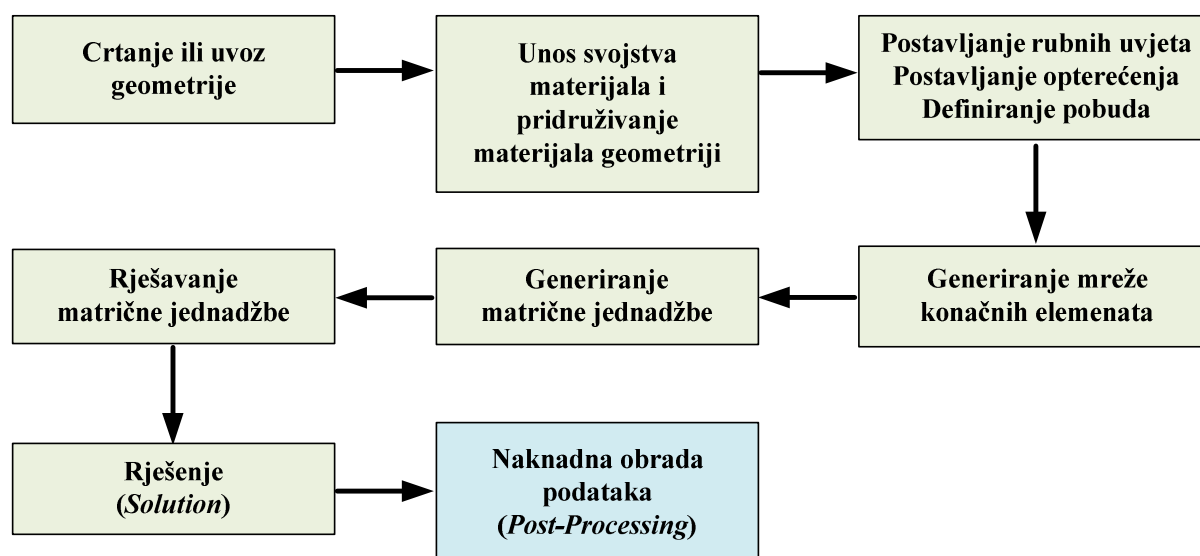
Provjera:

$$\varphi + R \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d\varphi}{dn} = U_0 \rightarrow R \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d\varphi}{dn} = U_0 - \varphi. \quad (2-36)$$

Ako $R \rightarrow \infty$, jedini način da prethodni izraz daje konačni potencijal nastupa kada $d\varphi/dn \rightarrow 0$ što odgovara Neumanovom rubnom uvjetu, odnosno nema normalne komponente električnog polja na granici. Donja ploča ne može utjecati na električno polje.

2.6 Dijagram toka primjene numeričkih metoda u elektromagnetizmu

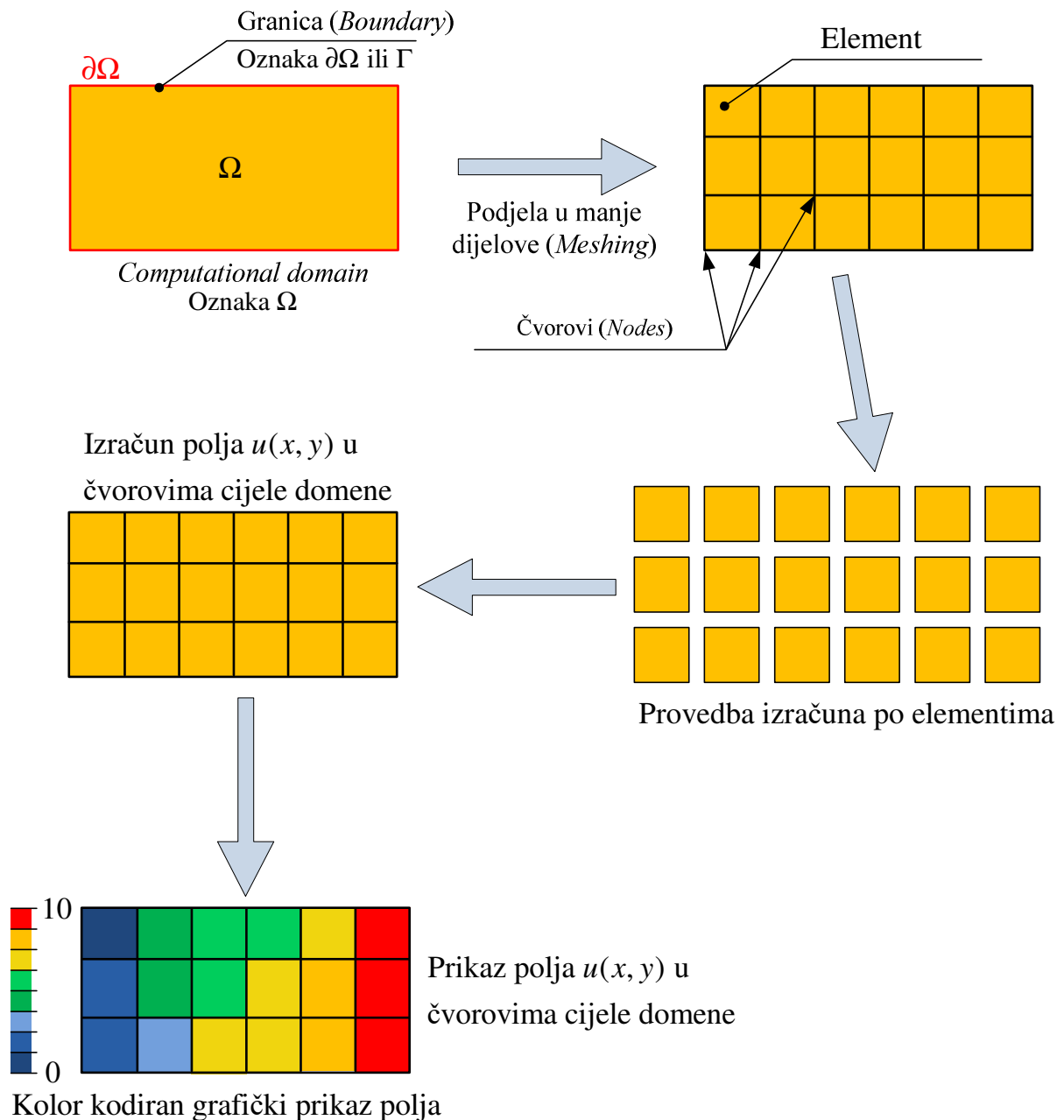
Moderni programski paketi za modeliranje i analizu elektromagnetskih (EM) zadaća (problema) desetljećima su se razvijali do oblika kakve danas poznajemo. Praktična rješenja koja su se pokazala pogodnima i dobro su prihvaćena od strane korisnika ubrzo su usvajale i međusobno konkurentne tvrtke sličnih programskih rješenja. Iz toga proizlazi sličnost modernih programskih rješenja za modeliranje i analizu (EM) zadaća. Tako, na primjer, poznatiji programski paketi za modeliranje i analizu EM zadaća, kao što su Ansys Electronics [17], Comsol [18], CST Studio Suite [19], QuickField [20] i CDEGS [21] mogu se podijeliti na slične glavne programske komponente kao što su CAD alat (sučelje za crtanje geometrije), Preprocesor (izbor i postavljanje materijala, mreže, početnih i rubnih uvjeta), Solver (rješava sustav jednadžbi) i Postprocesor (analiza i vizualizacija rezultata). Općeniti slijed radnji (dijagram toka) koji se odvijaju pri korištenju prethodno navedenih modernih programskih može se prikazati na način kako je to prikazano slikom 2.8. U nekim koracima (radnjama) sudjeluje korisnik, a drugi se koraci odvijaju bez sudjelovanja korisnika.



Slika 2.8 Općeniti slijed radnji (dijagram toka) koje se odvijaju prilikom korištenja modernih programskih paketa.

2.7 Slijed radnji u primjeni metode konačnih elemenata

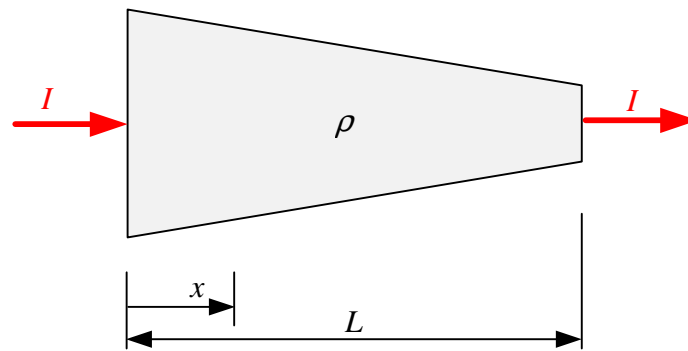
Nakon što je nacrtana geometrija, odabrani materijali od kojih se geometrija sastoji te postavljeni rubni uvjeti, slijedi numerički izračun približnog rješenja polja. Označimo sa $u(x, y)$ rješenje elektromagnetske zadaće određene rubnim (graničnim) uvjetima (engl. *Boundary value problem*). Općeniti slijed radnji u primjeni metode konačnih elemenata može se prikazati dijagramom toka prikazanim na slici 2.9.



Slika 2.9 Općeniti slijed radnji (dijagram toka) koje se odvijaju prilikom korištenja metode konačnih elemenata.

Primjer određivanja električnog otpora vodljivog tijela metodom konačnih elemenata

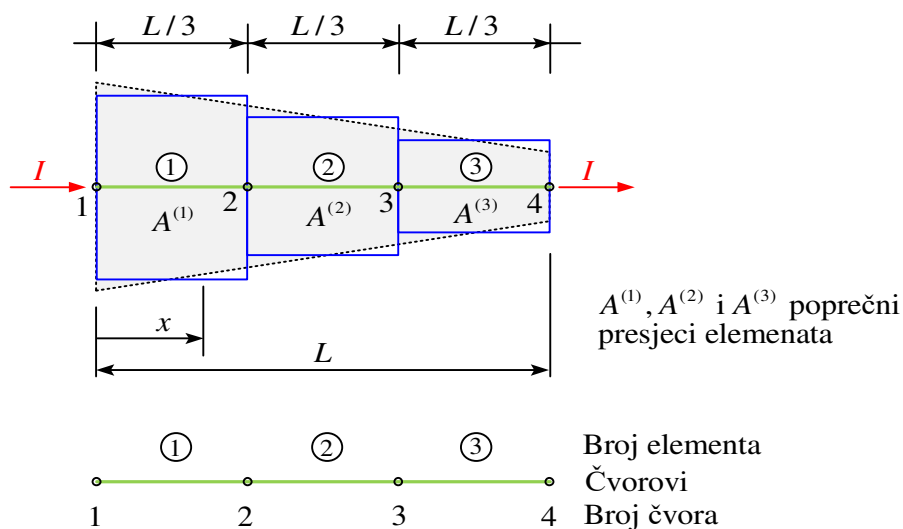
Primjenom **metode konačnih elemenata (MKE)** odredite električni otpor vodljivog tijela oblika krnjeg stošca (Slika 2.10) između njegovih baza, odredite funkciju po kojoj se mijenja skalarni električni potencijal uzduž aksijalne osi. Poznati podaci su: duljina $L=3$ m, jakost struje koja teče svakom od baza $I=100$ A, površina veće baze 10 cm^2 , površina manje baze 5 cm^2 . Specifični električni otpor bakra iznosi $\rho = 0,0175$ ($\Omega\text{ mm}^2/\text{m}$), tj. specifična električna vodljivost $\sigma = 57,14$ ($\text{S}\cdot\text{m}/\text{mm}^2$).



Slika 2.10 Vodljivo tijelo oblika krnjeg stošca, smjer struje i geometrijski podatci.

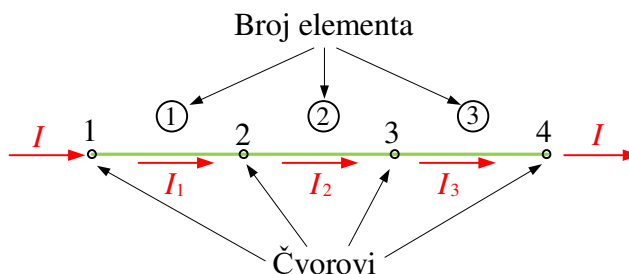
Rješenje

Diskretizacija domene, odnosno podjela vodljivog tijela na elemente konačnih dimenzija. S obzirom da zadatak rješavamo ručno, odabrat ćemo za elemente cilindre. Radi zornosti prikaza, tj. kako račun ne bi bio predug, odabrat ćemo mali broj elemenata, npr. 3 elementa. Izgled vodiča oblika krnjeg stošca i njegova reprezentacija s trima cilindričnim elementima prikazana je na Slici 2.11.



Slika 2.11 Vodič oblika krnjeg stošca i njegova reprezentacija s trima cilindričnim elementima.

Za formiranje sustava jednažbi koje opisuju promatrani sustav možemo se poslužiti jednostavnijim grafičkim prikazom elemenata, čvorova i smjerova kojima teku struje uzduž elementa kako je to prikazano na Slici 2.12. S obzirom da nema otjecanja struje iz elementa prema okolini, vrijedi $I = I_1 = I_2 = I_3$.



Slika 2.12 Simbolički prikaz elemenata, čvorova i smjerova kojima protječu struje uzduž elemenata.

Za **tri elementa** imamo **četiri čvora**. Struju koja izlazi iz vodiča uzet ćemo s plus predznakom, a struju koja izlazi iz čvora s negativnim predznakom. Za svaki čvor, Kirchhoffove jednažbe za struju glase:

$$\text{Čvor 1:} \quad G_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - I = 0, \quad (2-37)$$

$$\text{Čvor 2:} \quad -G_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + G_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) = 0, \quad (2-38)$$

$$\text{Čvor 3:} \quad -G_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) + G_3 \cdot (\varphi_3 - \varphi_4) = 0, \quad (2-39)$$

$$\text{Čvor 4:} \quad -G_3 \cdot (\varphi_3 - \varphi_4) + I = 0. \quad (2-40)$$

Dobiven je sustav od četiriju linearnih jednažbi s četirima nepoznanicama. Preuredimo jednažbe na način da su na jednoj strani znaka jednakosti nepoznanice, a s druge strane znaka jednakosti poznate vrijednosti.

$$G_1 \cdot \varphi_1 - G_1 \cdot \varphi_2 + 0 \cdot \varphi_3 + 0 \cdot \varphi_4 = I, \quad (2-41)$$

$$-G_1 \cdot \varphi_1 + (G_1 + G_2) \cdot \varphi_2 - G_2 \cdot \varphi_3 + 0 \cdot \varphi_4 = 0, \quad (2-42)$$

$$0 \cdot \varphi_1 - G_2 \cdot \varphi_2 + (G_2 + G_3) \cdot \varphi_3 - G_3 \cdot \varphi_4 = 0, \quad (2-43)$$

$$0 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot \varphi_2 - G_3 \cdot \varphi_3 + G_3 \cdot \varphi_4 = -I. \quad (2-44)$$

Prethodni sustav jednadžbi napisan u matričnom obliku glasi:

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 & G_2 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & 0 & -G_3 & G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix}. \quad (2-45)$$

Sažeti zapis prethodne matrične jednadžbe

$$[G] \cdot [\varphi] = [I]. \quad (2-46)$$

Gdje je $[G]$ matrica sustava, $[\varphi]$ vektor nepoznanica, $[I]$ vektor pobuda.

Elementi matrice sustava imaju jedinice vodljivosti (Siemens) gdje je G_1 - vodljivost prvog elementa, G_2 - vodljivost drugog elementa, G_3 - vodljivost trećeg elementa.

Dobivena je matrica sustava dijagonalna i rijetko popunjena (većina van dijagonalnih elemenata je nula). Da smo imali veću matricu, bila bi izraženija popunjenost nulama. Također, opažamo simetriju spram dijagonale u matrici. Druge numeričke metode u elektromagnetizmu generiraju drugačije tipove matrica. Na primjer, metoda momenata generira gusto popunjenu matricu (osim slučajno, elementi su generalno različiti od nule).

Određivanje elemenata matrice sustava

Opći izraz za površinu poprečnog presjeka stošca na poziciji x :

$$A(x) = C_1 \cdot x + C_2. \quad (2-47)$$

Konstante C_1 i C_2 određujemo iz rubnih uvjeta $A(0) = 10$, $A(3) = 5$:

$$A(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = 10 \Rightarrow C_2 = 10, \quad (2-48)$$

$$A(3) = C_1 \cdot 3 + 10 = 5 \Rightarrow C_1 = \frac{5-10}{3} = -\frac{5}{3}. \quad (2-49)$$

Uvrštavanje dobivenih iznosa konstanti C_1 i C_2 u (2-47) daje izraz za površinu poprečnog presjeka stošca na poziciji x (Slika 2.11):

$$A(x) = -\frac{5}{3} \cdot x + 10. \quad (2-50)$$

Pozicija je prvog čvora $x_1 = 0$ m, a zadnjeg čvora $x_4 = 3$ m.

Poprečni presjek elementa izražen kroz poprečni presjek stošca na poziciji čvorova pridruženih elementu:

$$A_{(1)} = \frac{A_1 + A_2}{2}, \quad A_{(2)} = \frac{A_2 + A_3}{2}, \quad A_{(3)} = \frac{A_3 + A_4}{2}. \quad (2-51)$$

Odredimo poprečne presjeke stošca na pozicijama x koje odgovaraju pojedinim čvorovima.

Tablica 2.2 Broj čvora, pozicija čvora i poprečni presjek stošca na poziciji čvora.

Čvor	Pozicija (izraz)	Pozicija (brojčano)	Poprečni presjek stošca na poziciji čvorova određen prema izrazu (4) izražen u cm ²
1	$x = 0$	$x = 0,0$	$A_1 = 10,000$
2	$x = 1 \cdot (L/3)$	$x = 1,0$	$A_2 = 8,333$
3	$x = 2 \cdot (L/3)$	$x = 2,0$	$A_3 = 6,667$
4	$x = 3 \cdot (L/3)$	$x = 3,0$	$A_4 = 5,000$

Tablica 2.3 Površina poprečnog presjeka i -tog elementa.

Formula	$A_{(1)} = \frac{A_1 + A_2}{2}$	$A_{(2)} = \frac{A_2 + A_3}{2}$	$A_{(3)} = \frac{A_3 + A_4}{2}$
Brojčana vrijednost (cm ²)	9,167	7,500	5,834
Brojčana vrijednost* (mm ²)	916,7	750,0	583,4

* 1 cm²=100 mm²

Opći izraz za električnu vodljivost:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho \cdot \frac{L}{A}} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A}{L}. \quad (2-52)$$

Električna vodljivost svakog pojedinog elementa (i -tog elementa):

$$G_{(i)} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A_{(i)}}{L/3} = \frac{3}{\rho} \cdot \frac{A_{(i)}}{L}. \quad (2-53)$$

Tablica 2.4 Električna vodljivost i -tog elementa.

Formula	$G_1 = \frac{3}{\rho} \cdot \frac{A_{(1)}}{L}$	$G_2 = \frac{3}{\rho} \cdot \frac{A_{(2)}}{L}$	$G_3 = \frac{3}{\rho} \cdot \frac{A_{(3)}}{L}$
Brojčana vrijednost (S)	$5,238 \cdot 10^4$	$4,286 \cdot 10^4$	$3,334 \cdot 10^4$
Brojčana vrijednost (kS)	52,38	42,86	33,34

Prisjetimo se, matrica sustava glasi:

$$[G] = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 & G_2 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & 0 & -G_3 & G_3 \end{bmatrix}. \quad (2-54)$$

Uvrštavanjem brojčanih vrijednosti iz Tablice 2.4 u prethodni izraz daje:

$$[G] = \begin{bmatrix} 52,38 \cdot 10^3 & -52,38 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ -52,38 \cdot 10^3 & 52,38 \cdot 10^3 + 42,86 \cdot 10^3 & 42,86 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & -42,86 \cdot 10^3 & 42,86 \cdot 10^3 + 33,34 \cdot 10^3 & -33,34 \cdot 10^3 \\ 0 & 0 & -33,34 \cdot 10^3 & 33,34 \cdot 10^3 \end{bmatrix}. \quad (2-55)$$

Daljnje sređivanje prethodnog izraza daje:

$$[G] = \begin{bmatrix} 52,38 \cdot 10^3 & -52,38 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ -52,38 \cdot 10^3 & 95,24 \cdot 10^3 & 42,86 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & -42,86 \cdot 10^3 & 76,2 \cdot 10^3 & -33,34 \cdot 10^3 \\ 0 & 0 & -33,34 \cdot 10^3 & 33,34 \cdot 10^3 \end{bmatrix}. \quad (2-56)$$

Kombiniranje izraza (2-45) s prethodnim izrazom daje:

$$\begin{bmatrix} 52,38 \cdot 10^3 & -52,38 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ -52,38 \cdot 10^3 & 95,24 \cdot 10^3 & 42,86 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & -42,86 \cdot 10^3 & 76,2 \cdot 10^3 & -33,34 \cdot 10^3 \\ 0 & 0 & -33,34 \cdot 10^3 & 33,34 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}. \quad (2-57)$$

Matrična jednadžba (2-57) može se riješiti proizvoljnim izborom jedne od metoda za rješavanje matričnih jednadžbi. Za razliku od ovog primjera, sustav jednadžbi pri primjeni MKE-a znatno je veći, na primjer, matrica sustava može sadržavati milijune elemenata. Tad se isključivo koriste iterativni procesi za rješavanje sustava linearnih jednadžbi.

Rješenje matrične jednadžbe (2-57) glasi:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,242 \cdot 10^{-3} \\ 2,333 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ -2,999 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,242 \\ 2,333 \\ 0 \\ -2,999 \end{bmatrix} \text{ (mV)}. \quad (2-58)$$

Provjerimo!

$$\text{Čvor 1: } G_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - I = 0, \quad (2-59)$$

$$52,38 \cdot 10^3 (4,242 - 2,333) \cdot 10^{-3} = 100, \quad (2-60)$$

$$52,38 \cdot (4,242 - 2,333) = 100, \quad (2-61)$$

$$52,38 \cdot 1,909 = 100, \quad (2-62)$$

$$99,993 \approx 100 \Rightarrow \text{Rezultat je dobar!!!} \quad (2-63)$$

Savjet! Kada se radi s potencijalima, ako je to pogodno, može se potencijal određenog čvora postaviti na nulu, na primjer $\varphi_4 = 0 \text{ V}$. **Navedeno se ne smije raditi s naponima!**

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,242 \cdot 10^{-3} \\ 2,333 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ -2,999 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,999 \cdot 10^{-3} \\ 2,999 \cdot 10^{-3} \\ 2,999 \cdot 10^{-3} \\ 2,999 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,241 \\ 5,332 \\ 2,999 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (mV)}. \quad (2-64)$$

Opazimo, razlika potencijala, tj. napon između čvorova ostao je nepromijenjen!

Provjerimo koliko se dobiveni rezultat dobiven MKE-om razlikuje od egzaktnog (stvarnog). U rijetkim slučajevima, kao što je ovaj, imamo egzaktne formule. Na primjer, provjerit ćemo koliki je ukupni otpor između baza stošca.

Izračun otpora između baza stošca primjenom MKE-a.

Prvi način:

$$R_{\text{MKE}} = \frac{1}{G_{\text{MKE}}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3}. \quad (2-65)$$

Drugi način:

$$R_{\text{MKE}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{I}. \quad (2-66)$$

Izračun brojčane vrijednosti prema prvom načinu:

$$R_{\text{MKE}} = \frac{1}{G_{\text{MKE}}} = \frac{1}{52,38 \cdot 10^3} + \frac{1}{42,86 \cdot 10^3} + \frac{1}{33,34 \cdot 10^3} =$$

$$= \left(\frac{1}{52,38} + \frac{1}{42,86} + \frac{1}{33,34} \right) \cdot 10^{-3}. \quad (2-67)$$

$$R_{\text{MKE}} = 0,072 \cdot 10^{-3} = 0,072 \text{ m}\Omega. \quad (2-68)$$

Izračun brojčane vrijednosti prema drugom načinu:

$$R_{\text{MKE}} = \frac{(7,241 - 0) \cdot 10^{-3}}{100} = \frac{7,241}{100} \cdot 10^{-3} = 0,07241 \cdot 10^{-3} = 0,0724 \text{ m}\Omega. \quad (2-69)$$

Napomena! Manja razlika u obama pristupima posljedica je zaokruživanja!

Provjera valjanosti izračuna

▪ Prvi način, provjera je li rezultat unutar granica za koje znamo da se mora nalaziti

Kada nemamo formulu koja daje egzaktni rezultat, tada provjeravamo je li rezultat unutar granica za koje smo sigurni da se mora nalaziti. Dobivena vrijednost otpora mora ležati unutar intervala otpora koji odgovaraju slučajevima kada bi poprečan presjek bio konstantan i iznosio $A(x=0)$ te $A(x=3)$.

$$R_{\text{granica donja}} < R_{\text{MKE}} < R_{\text{granica gornja}}, \quad (2-70)$$

$$R_{\text{granica donja}} = \rho \cdot \frac{L}{A(0)} = 0,0175 \cdot \frac{3}{10 \cdot 10^2} = \frac{0,0525}{10^3} = 0,0525 \text{ m}\Omega, \quad (2-71)$$

$$R_{\text{gornja}}^{\text{granica}} = \rho \cdot \frac{L}{A(3)} = 0,0175 \cdot \frac{3}{5 \cdot 10^2} = \frac{0,0525}{5 \cdot 10^2} = 0,105 \text{ m}\Omega, \quad (2-72)$$

$$0,0525 \text{ m}\Omega < 0,0724 \text{ m}\Omega < 0,105 \text{ m}\Omega. \quad (2-73)$$

▪ Drugi način, usporedba s rezultatom dobivenim analitičkim izrazima

U nekim slučajevima, kao što je ovaj, rezultat možemo provjeriti uspoređujući ga s analitičkim izrazom za električni otpor krnjeg stošca. Napomena, rijetko imamo slučaj kao ovaj za kojega znamo egzaktno rješenje.

Otpor elementa diferencijalne duljine dL , tj. dx iznosi:

$$dR = \rho \cdot \frac{dL}{A(x)} = \rho \cdot \frac{dx}{A(x)}. \quad (2-74)$$

Izraz po kojemu se mijenja površina stošca prethodno je određen i glasi $A(x) = C_1 \cdot x + C_2$, a daje iznos površine u cm^2 na poziciji x . S obzirom da je specifični otpor (otpornost) zadan kao $\rho = 0,0175 \text{ } (\Omega \text{ mm}^2/\text{m})$, izraz za površinu treba izraziti u mm^2 , tj. $A(x) = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot 10^2$.

Uvrštavanjem izraza po kojemu se mijenja površina poprečnog presjeka krnjeg stošca ($A(x) = C_1 \cdot x + C_2$) u prethodni izraz daje:

$$dR = \rho \cdot \frac{dx}{(C_1 \cdot x + C_2) \cdot 10^2}. \quad (2-75)$$

Ukupan električni otpor vodljivog tijela između njegovih baza dobiva se integriranjem prethodnog izraza u granicama od $x=0$ do $x=L$:

$$R = \int dR = \int_{x=0}^{x=L} \rho \cdot \frac{dx}{(C_1 \cdot x + C_2) \cdot 10^2} = \rho \cdot 10^{-2} \cdot \int_{x=0}^{x=L} \frac{dx}{C_1 \cdot x + C_2}. \quad (2-76)$$

Prethodni integral ima rješenje (vidjeti Bronštejn [22]):

$$\int \frac{dx}{a \cdot x + b} = \frac{1}{a} \ln(a \cdot x + b). \quad (2-77)$$

Koristeći se rješenjem neodređenog integrala (2-77), rješenje određenog integrala (2-76) glasi:

$$\begin{aligned} R &= \rho \cdot \frac{10^{-2}}{C_1} \cdot \left[\ln(C_1 \cdot x + C_2) \right]_{x=0}^{x=L} = \\ &= \rho \cdot \frac{10^{-2}}{C_1} \cdot \left[(\ln(C_1 \cdot L + C_2)) - \ln(C_1 \cdot 0 + C_2) \right] = \\ &= \rho \cdot \frac{10^{-2}}{C_1} \cdot \ln \frac{C_1 \cdot L + C_2}{C_2}. \end{aligned} \quad (2-78)$$

$$\begin{aligned} R &= \rho \cdot \frac{10^{-2}}{C_1} \cdot \ln \frac{C_1 \cdot L + C_2}{C_2} = \rho \cdot \frac{10^{-2}}{\frac{5}{3}} \cdot \ln \frac{-\frac{5}{3} \cdot 3 + 10}{10} = \\ &= -\rho \cdot \frac{5}{3} \cdot 10^{-2} \cdot \ln \frac{-5 + 10}{10} = -\rho \cdot \frac{3}{5} \cdot 10^{-2} \cdot \ln \frac{5}{10} = \\ &= \rho \cdot \frac{3}{5} \cdot 10^{-2} \cdot \ln \frac{10}{5} = \rho \cdot 10^{-2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \ln 2. \end{aligned} \quad (2-79)$$

Numerička vrijednost prema egzaktnom analitičkom izrazu glasi:

$$\begin{aligned} R &= \rho \cdot 10^{-2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \ln 2 = 0,0175 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \ln 2 = \\ &= 0,0175 \cdot 10^{-2} \cdot 0,6 \cdot 0,693 = 0,072765 \text{ m}\Omega. \end{aligned} \quad (2-80)$$

$$R_{\text{egzaktno}} = 0,0728 \text{ m}\Omega. \quad (2-81)$$

Za usporedbu, MKE dao je rezultat:

$$R_{\text{MKE}} = 0,0724 \text{ m}\Omega . \quad (2-82)$$

Postotna pogreška definirana je izrazom:

$$p\% = \frac{x_{\text{dobiveno}} - x_{\text{točno}}}{x_{\text{točno}}} \cdot 100\% . \quad (2-83)$$

Postotna pogreška MKE-a u odnosu na egzaktno rješenje iznosi:

$$p\% = \frac{R_{\text{MKE}} - R_{\text{egzaktno}}}{R_{\text{egzaktno}}} \cdot 100\% = \frac{0,0724 - 0,0728}{0,0728} \cdot 100\% = -0,549\% . \quad (2-84)$$

Posebno je zanimljivo što smo za samo tri elementa dobili rezultat kojemu je pogreška manja od jedan posto. Da smo računali s više elemenata, pogreška bi bila još manja. Općenito vrijedi:

Ako je domena diskretizirana na veći broj elemenata, točnost je rezultata veća!

Ako je veći broj elemenata, proračun je sporiji!

Ako je veći broj elemenata, potrebno je više radne memorije!

2.8 Naknadna obrada podataka (engl. *Post-processing*)

Ovisno o tome kojim je skupom jednadžbi formulirano polje za čije je rješavanje primijenjena metoda konačnih elemenata, naknadno (nakon primjene MKE-a) često je potrebno odrediti skalarna i vektorska polja i drugih fizikalnih veličina. Također, često je potrebno naknadno i poboljšati kvalitetu dobivenih rezultata. Neke od dobivenih rezultata potrebno je tablično ili grafički prikazati za što se primjenjuju posebni algoritmi. Na primjer, prikaz rezultata kolor kodiranim grafičkim prikazima, upotreba strelica za prikaz vektorskih polja, traženje ekstrema (maksimuma i minimuma). Sve postupke koje primjenjujemo nakon MKE-a nazivamo naknadnom obradom podataka (engl. *Post-processing*).

Primjenu naknadne obrade podataka (engl. *Post-processing*) pokazat ćemo na primjeru određivanja glatke funkcije kojom je opisana promjena potencijala duž uzdužne osi vodiča.

Primjenom metode konačnih elementa (MKE), određen je potencijal u četirima točkama duž uzdužne osi vodiča. Jedan od načina na koji se može dobiti glatka funkcija (bez skokova) iz dobivenih rezultata jest upotreba polinoma N -tog stupnja koji vrijedi duž uzdužne osi vodiča:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N S_k(x) \cdot \varphi_k, \quad S_k(x) = \prod_{m=1}^N \frac{(x - x_m) \text{ ispušten } (x - x_k)}{(x_k - x_m) \text{ ispušten } (x_k - x_k)} \quad (2-85)$$

gdje $S_k(x)$ označava polinom, koji predstavlja k -tu oblikovnu funkciju, a φ_k iznos potencijala u k -tom čvoru.

Pozicije su čvorova: $x_1 = 0,0$, $x_2 = 1,0$, $x_3 = 2,0$ i $x_4 = 3,0$.

$$S_1(x) = \prod_{m=1}^4 \frac{(x - x_m) \text{ ispušten } (x - x_1)}{(x_1 - x_m) \text{ ispušten } (x_1 - x_1)} = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}, \quad (2-86)$$

$$S_2(x) = \prod_{m=1}^4 \frac{(x - x_m) \text{ ispušten } (x - x_2)}{(x_2 - x_m) \text{ ispušten } (x_2 - x_2)} = \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}, \quad (2-87)$$

$$S_3(x) = \prod_{m=1}^4 \frac{(x - x_m) \text{ ispušten } (x - x_3)}{(x_3 - x_m) \text{ ispušten } (x_3 - x_3)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)}, \quad (2-88)$$

$$S_4(x) = \prod_{m=1}^4 \frac{(x - x_m) \text{ ispušten } (x - x_4)}{(x_4 - x_m) \text{ ispušten } (x_4 - x_4)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}. \quad (2-89)$$

Nakon uvrštavanja brojčanih vrijednosti dobivaju se oblikovne funkcije:

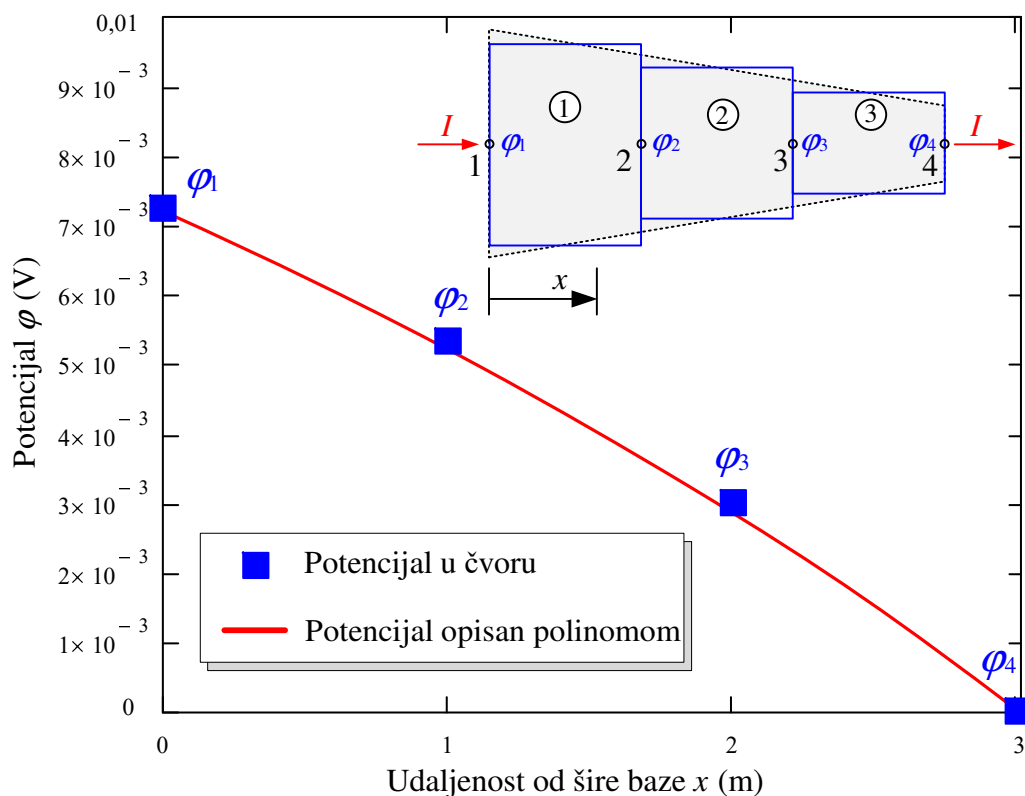
$$S_1(x) = -\frac{1}{6} \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3), \quad (2-90)$$

$$S_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x-3), \quad (2-91)$$

$$S_3(x) = -\frac{1}{2} \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-3), \quad (2-92)$$

$$S_4(x) = \frac{1}{6} \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2). \quad (2-93)$$

Dobivene oblikovne funkcije zajedno s izrazima (2-64) i (2-85) omogućavaju opis skalarnog električnog potencijala polinomom trećeg stupnja (Slika 2.13).



Slika 2.13 Skalarni električni potencijal u čvorovima i opis potencijala duž uzdužne osi vodiča glatkom funkcijom (polinomom trećeg stupnja).

Popis literature

- [1] Joe D. Hoffman, Steven Frankel, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, CRC Press; drugo izdanje, 2001. ISBN-10: 0-8247-0443-6
- [2] Zijad Haznadar, Željko Štih, *Electromagnetic Fields, Waves, and Numerical Methods*, Amsterdam: IOS Press, 2000. ISBN-13: 978-1586030643
- [3] Matthew Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics*, drugo izdanje, Boca Raton: CRC Press; 2000. ISBN-10: 0-8493-1395-3
- [4] Daryl L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method*, šesto izdanje, Boston: Cengage Learning; 2016. ISBN-13: 978-1305635111
- [5] Saeed Moaveni, *Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS*, 1. izdanje, Upper Saddle River: Pearson, 1999. ISBN-13: 978-0137850983
- [6] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu, J. Z., *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, 6. izdanje, Oxford: Elsevier, 2002. ISBN 978-0-7506-6320-5
- [7] Stephen D. Gedney, *Introduction to the Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Method for Electromagnetics*, 1. izd. Cham: Springer, 2011. ISBN-13: 978-3031005848
- [8] Radostina Vasileva Petrova, *Finite Volume Method - Powerful Means of Engineering Design*, Rijeka: IntechOpen, 2012. ISBN-13: 978-953-51-0445-2, doi: 10.5772/2542
- [9] Friedel Hartmann, *Introduction to Boundary Elements: Theory and Applications*, 1. izd. Berlin: Springer, 1989. ISBN-13: 978-3540504306
- [10] Walton C. Gibson, *The Method of Moments in Electromagnetics*, 1. izd. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2007. ISBN-13: 978-1420061451
- [11] Edward M. Purcell, David J. Morin, *Electricity and Magnetism*, 3. izd. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. ISBN-13: 978-1107014022
- [12] William H. Hayt, *Engineering electromagnetics*, 4. izd. New York: McGraw-Hill Education, 1981. ISBN-13: 978-0070273955
- [13] N. E. Tovmasyan, L. Z. Gevorkyan, G. V. Zakaryan, *Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics*, Singapore: World Scientific Publishing Company, 1994. ISBN-13: 978-9810213510
- [14] John David Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3. izd. New York: Wiley, 1998. ISBN-13: 978-0471309321
- [15] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 5. izd. Cambridge: Cambridge University Press, 2023. ISBN-13: 978-1009397759
- [16] Joseph Edminister, *Schaum's Outline of Electromagnetics*, 4. izd. New York: McGraw-Hill Education, 2013. ISBN-13: 978-0071831475
- [17] Computer-aided engineering (CAE)/ multiphysics engineering simulation software for product design and testing. Ansys, dostupno na: <https://www.ansys.com>, pristupljeno 17.4.2025.
- [18] General-purpose simulation software based on advanced numerical methods. Comsol, dostupno na: <https://www.comsol.com>, pristupljeno 17.4.2025.
- [19] CST Studio Suite is a high-performance 3D EM analysis software package for designing, analyzing and optimizing electromagnetic (EM) components and systems, CST Studio Suite, dostupno na: <https://www.3ds.com/products/simulia/cst-studio-suite>, pristupljeno 17.4.2025.
- [20] QuickField is a very efficient Finite Element Analysis package for electromagnetic, thermal, and stress design simulation with coupled multi-field analysis, QuickField, dostupno na: <https://quickfield.com>, pristupljeno 17.4.2025.
- [21] CDEGS - Current Distribution, Electromagnetic Fields, Grounding and Soil Structure Analysis is a powerful set of integrated software tools designed to accurately analyze a variety of electromagnetic related problems encountered in all industries involving electric networks, dostupno na: <https://www.sestech.com>, pristupljeno 17.4.2025.
- [22] Izak N. Bronštejn, Konstantin A. Semendžajev, *Matematički priručnik*, Zagreb: Golden marketing – Tehnička knjiga, 2004. ISBN-13: 978-9532121765

3. ELEKTROSTATIKA

Elektrostatika (elektro + statika), (engl. *Electrostatics*) grana je fizike koja se bavi istraživanjem polja, sila i pojava nastalih među mirnim česticama nabijenima električnim nabojem [1]. S obzirom na jednostavnost teorije kojom je opisana elektrostatika, pogodno je prve vježbe računalno podržanog modeliranja i analiziranja električnih polja i skalarnih električnih potencijala u programskom paketu Ansys Electronics započeti s primjerima iz elektrostatike. U tu svrhu poslužit će nekoliko jednostavnijih primjera iz elektrostatike. Za lakše razumijevanje fizikalne slike vježbi predviđenih iz elektrostatike, pogodno je podsjetiti se nekoliko važnih činjenica koje vrijede u elektrostatici.

- U elektrostatici, električni naboji kojim su nabijena vodljiva tijela uvijek završavaju na površini vodljivih tijela [2-6]. Električni se naboji spontano raspoređuju po površini vodljivog tijela na način da je koncentracija naboja veća u područjima s manjim radijusom zakrivljenosti vodljivog tijela, a manja u područjima s većim radijusom zakrivljenosti. Ukratko, naboj kojim su nabijena vodljiva tijela ima tendenciju koncentriranja uz bridove vodljivog tijela [2-6]. Sukladno navedenom, jedino u slučaju vodljive kugle, geometrijskog tijela koje ima jednak radijus zakrivljenosti svih točaka na površini, naboj se raspodjeljuje jednoliko po površini kugle te je površinska gustoća naboja jednolika duž cijele površine vodljive kugle.
- Naboj na površini vodljivih tijela uzrokuje električno polje u prostoru oko vodljivog tijela koje se proteže od površine vodljivog tijela k beskonačnosti. Na samoj površini vodljivog tijela jačina električnog polja direktno je proporcionalna površinskoj gustoći naboja na vodljivom tijelu. Odnosno, jakost električnog polja na površini nabijenog vodljivog tijela veća je uz bridove u odnosu na ostalu površinu. Električno polje na površini vodljivih tijela ima samo komponentu koja je okomita na površinu vodiča (normalna komponenta električnog polja) [2-6]. Komponenta električnog polja paralelna površini vodiča (tangencijalna komponenta električnog polja) jednaka je nuli [2-6].
- Ukoliko je vodljivo tijelo šuplje, neovisno o tome je li vodljivo tijelo nabijeno ili je pod djelovanjem vanjskog električnog polja; u šupljini vodljivog tijela nema električnog polja [2, 3]. U šupljini vodljivog tijela može postojati električno polje samo ukoliko se u toj šupljini nalazi naboj koji nije dotaknuo unutarnju plohu vodljivog tijela. Ukoliko naboj u šupljini vodljivog tijela dotakne unutarnju plohu vodljivog tijela, završit će na vanjskoj plohi vodljivog tijela.
- U elektrostatici, sve točke prostora zauzete vodljivim materijalom nalaze se na istom skalarnom električnom potencijalu [2-6].

3.1 Polje na granici dvaju medija različitih permitivnosti

Kada je prostor u kojemu je prisutno električno polje heterogen, važno je poznavati granične uvjete koji vrijede za vektorska polja (\vec{E} i \vec{D}) na granici između dvaju medija različitih permitivnosti. Vektorsko polje \vec{E} naziva se **jakost električnog polja** (engl. *Electric field strength*). Mjerna je jedinica jakosti električnoga polja volt po metru (V/m) ili njutn po kulonu (N/C) [1]. Vektorsko polje \vec{D} naziva se **polje električnog pomaka** (engl. *Electric displacement field*), (koriste se i nazivi vektorsko polje električne indukcije te vektorsko polje gustoće električnoga toka). Mjerna je jedinica električnog pomaka kulon po kvadratnome metru (C/m²). Granični uvjeti koji vrijede na granici dvaju dielektričnih medija različitih permitivnosti (npr. neka su im oznake ϵ_1 i ϵ_2) proizlaze iz Maxwellovih jednadžbi. Uobičajeno, za opis vladanja polja na granici dvaju medija, polje se rastavlja na normalnu (okomitu) i tangencijalnu (paralelnu) komponentu na graničnu plovu. Jednadžbe za polja \vec{E} i \vec{D} na granici bit će navedene **za slučaj bez slobodnih naboja na granici**.

Normalna komponenta električnog pomaka ostaje **kontinuirana** na granici dvaju medija različitih permitivnosti [2-6]:

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_1 = \vec{n} \cdot \vec{D}_2. \quad (3-1)$$

Upotrebom oznake „ \perp “ za normalnu (okomitu) komponentu polja, prehodni se izraz može zapisati u obliku:

$$\vec{D}_1^\perp = \vec{D}_2^\perp. \quad (3-2)$$

Tangencijalna je komponenta električnog polja kontinuirana na granici dvaju medija različitih permitivnosti [2-6]:

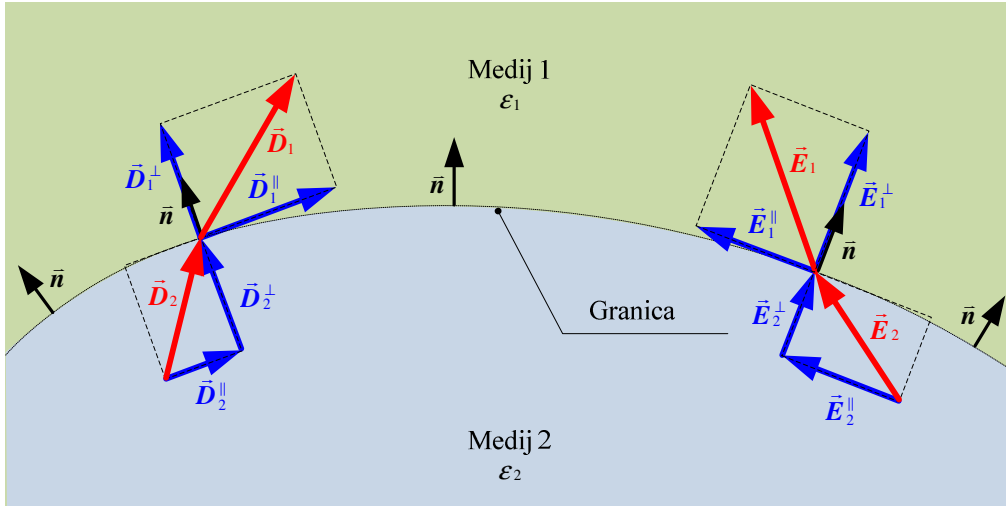
$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = \vec{n} \times \vec{E}_2. \quad (3-3)$$

Upotrebom oznake „ \parallel “ za tangencijalnu (paralelnu) komponentu polja, prehodni se izraz može zapisati u obliku:

$$\vec{E}_1^\parallel = \vec{E}_2^\parallel \quad (3-4)$$

gdje je \vec{n} jedinični vektor normale na površinu granice između dvaju medija.

Rubni uvjeti za \vec{E} i \vec{D} polja na granici dvaju medija različitih permitivnosti (označenih s ϵ_1 i ϵ_2) mogu se predstaviti grafički, na primjer, na način kao što je to prikazano na slici 3.1.



Slika 3.1 Grafički predstavljeni rubni uvjeti za \vec{E} i \vec{D} polja na granici između dvaju medija različitih permitivnosti (oznake ϵ_1 i ϵ_2).

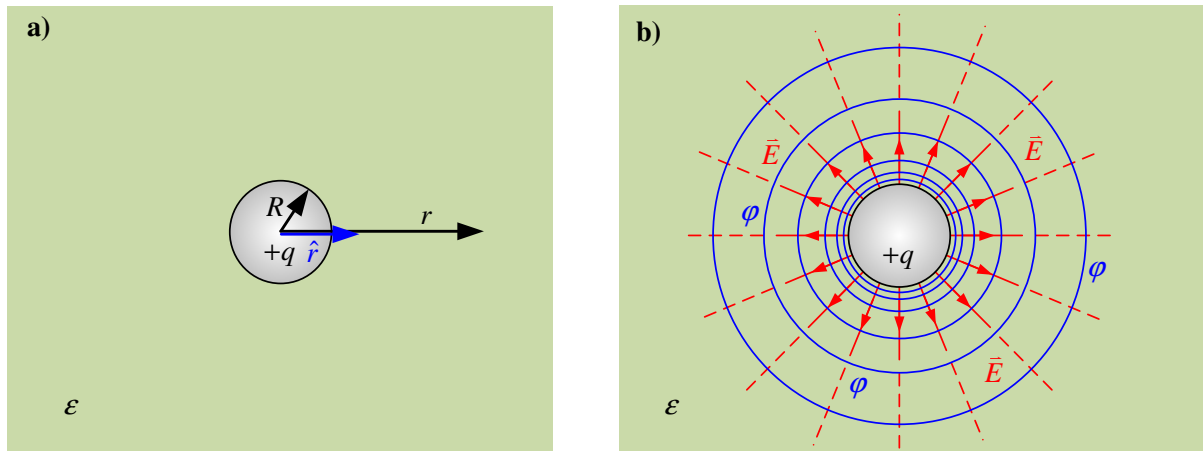
3.2 Električno polje i potencijal u prostoru oko nabijene vodljive kugle

Neka je vodljiva kugla polumjera R u potpunosti ispunjena vodljivim materijalom i nabijena količinom naboja q . Tada, u prostoru zauzetim vodljivim materijalom oblika kugle, nema električnog polja, a naboj koji se ravnomjerno rasporedio po površini vodljive kugle u prostoru s vanjske strane kugle uzrokuje električno polje koje se može opisati izrazom:

$$\vec{E} = \vec{E}(r) = \begin{cases} 0, & \text{za } 0 \leq r < R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \cdot \hat{r}, & \text{za } r \geq R. \end{cases} \quad (3-5)$$

gdje je r radijalna udaljenost od središta kugle, \hat{r} jedinični vektor, R polumjer kugle, q količina naboja kojom je kugla nabijena, ϵ je permitivnost (dielektričnost) prostora koja je s permitivnosti vakuuma vezana izrazom $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$, u kojemu je ϵ_0 permitivnost vakuuma koja iznosi $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm, a ϵ_r je relativna permitivnost medija u kojemu se kugla nalazi.

Grafički prikaz nabijene osamljene vodljive kugle u mediju permitivnosti ε i relevantni geometrijski podatci dani su na slici 3.2a. Električno polje u prostoru oko nabijene vodljive kugle prikazano je na slici 3.2b.



Slika 3.2 2D prikaz vodljive nabijene kugle: a) u beskonačnom homogenom prostoru i relevantni geometrijski podatci, b) električno polje \vec{E} predstavljeno silnicama polja u prostoru oko osamljene nabijene vodljive kugle i skalarni električni potencijal φ predstavljen ekvipotencijalnim krivuljama.

Kod statičkih je polja veza između električnog potencijala i električnog polja dana izrazom prema kojemu je električno polje negativni gradijent potencijala [2-6]:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (3-6)$$

S obzirom na simetriju ove elektromagnetske zadaće, prethodni se izraz pojednostavljuje i glasi:

$$\vec{E} = -\hat{r} \cdot \frac{d\varphi}{dr}. \quad (3-7)$$

Integriranje prethodnog izraza daje:

$$\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (3-8)$$

gdje je $d\vec{r}$ element puta koji je određen izrazom $d\vec{r} = \hat{r} \cdot dr$.

Uvrštavanjem (3-5) u prethodni izraz, uz uvažavanje da je $d\vec{r} = \hat{r} \cdot dr$, i $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$, daje:

$$\varphi = \varphi(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \int \frac{1}{r^2} \cdot \hat{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \int \frac{\hat{r} \cdot \hat{r}}{r^2} dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} + C \quad (3-9)$$

gdje je C konstanta integracije koja se određuje iz rubnog uvjeta.

Postavljanjem rubnog uvjeta prema kojemu potencijal teži nuli kada prostorna varijabla r teži beskonačnosti, tj. $\varphi(r \rightarrow \infty) = 0$ primijenjenog na izraz (3-9) daje:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} + C \right) = 0. \quad (3-10)$$

Granična je vrijednost prvog člana u zagradi nula kada $r \rightarrow \infty$ te je lijeva strana spram znaka jednakosti u izrazu (3-10) jednaka nuli samo ako je:

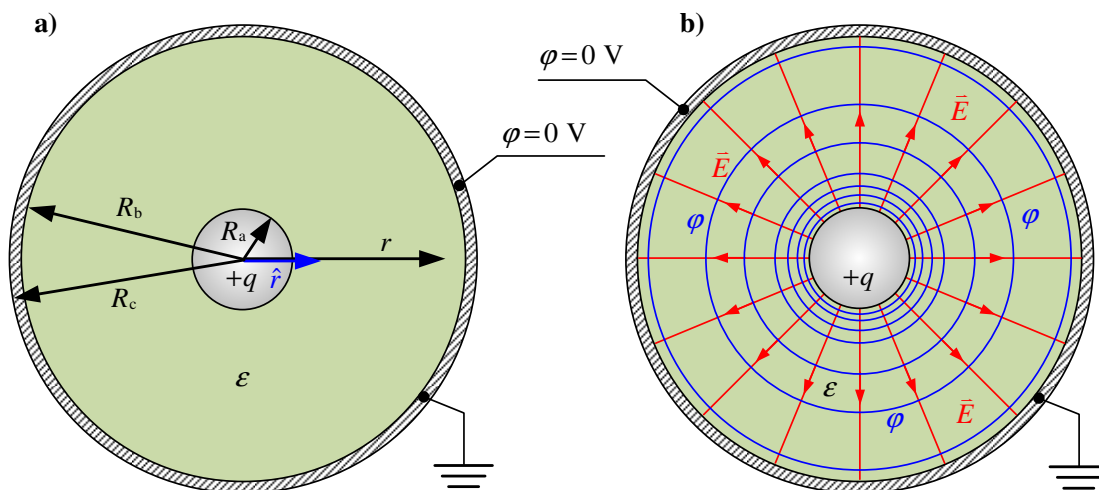
$$C = 0. \quad (3-11)$$

Poznavanjem iznosa konstante integracije C (izraz (3-11)), koristeći se izrazom (3-9), uz uvažavanje da su sve točke prostora unutar ispunjene vodljive kugle na istom električnom potencijalu, može se napisati izraz za potencijal osamljene nabijene vodljive kugle u beskonačnom prostoru:

$$\varphi = \varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{R}, & \text{za } 0 \leq r \leq R, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r}, & \text{za } R \leq r. \end{cases} \quad (3-12)$$

3.3 Električno polje i potencijal u prostoru između dvije koncentrične kugle različitih polumjera

Koristeći se prethodno opisanim postupkom u nastavku će biti prikazan postupak određivanja električnog polja i potencijala u prostoru između dvije koncentrične kugle različitih polumjera (slika 3.3 [7-9]). Neka je dio prostora između dviju vodljivih kugli različitih promjera ispunjen materijalom permitivnosti ε . Unutarnja, manja kugla ima polumjer R_a , a vanjska veća, ujedno i šuplja kugla, ima unutarnji polumjer R_b , a vanjski polumjer R_c (slika 3.3). Unutarnja, manja kugla nabijena je količinom naboja q , a vanjska veća šuplja kugla uzemljena je i nalazi se na električnom potencijalu od nula volti ($\varphi = 0$ V). Potrebno je odrediti električno polje i skalarni električni potencijal u prostoru između dviju koncentričnih kugli različitih polumjera. Stručno se još kaže da je potrebno odrediti električno polje i skalarni električni potencijal u sfernom sloju (engl. *Spherical shell*) (dio prostora između dviju koncentričnih kugli različitih polumjera koji je ograničen dvjema sfernim površinama (unutarnjom i vanjskom)).



Slika 3.3 2D prikaz dvije koncentrične kugle od vodljivog materijala različitih polumjera od kojih je unutarnja (manja) kugla nabijena, a vanjska veća kugla uzemljena, a) relevantni geometrijski podaci, b) električno polje u prostoru između koncentričnih kugli i skalarni električni potencijal φ predstavljen ekvipotencijalnim krivuljama.

Rješenje

S obzirom da u prostoru između vanjske plohe manje kugle i unutarnje plohe veće kugle nema slobodnih naboja, skalarni električni potencijal u navedenom prostoru može se odrediti korištenjem Laplaceove jednadžbe u sfernim koordinatama (zbog sferne simetrije) [7-9]:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0. \quad (3-13)$$

Prethodna diferencijalna jednačina ima rješenje oblika [7-9]:

$$\varphi(r) = \frac{A}{r} + B \quad (3-14)$$

gdje su A i B nepoznate konstante (nazivaju se i konstante integracije) koje se određuju iz rubnih uvjeta. Za ovaj zadatak poznata su oba rubna uvjeta.

Potencijal na vanjskoj plohi unutarnje kugle jednak je potencijalu kugle koja je nabijena nabojem q :

$$\varphi(R_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{R_a}. \quad (3-15)$$

Potencijal na unutarnjoj plohi vanjske kugle jednak je nuli (jer je vanjska kugla uzemljena):

$$\varphi(R_b) = 0. \quad (3-16)$$

Kombiniranje izraza (3-14) i (3-16) daje:

$$\frac{A}{R_b} + B = 0. \quad (3-17)$$

Iz prethodnog izraza dobiva se:

$$B = -\frac{A}{R_b}. \quad (3-18)$$

Uvrštavanje (3-18) u (3-14) daje:

$$\varphi(r) = \frac{A}{r} - \frac{A}{R_b}. \quad (3-19)$$

Prethodni izraz mora zadovoljiti i rubni uvjet dan izrazom (3-15) te je:

$$\frac{A}{R_a} - \frac{A}{R_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{R_a}. \quad (3-20)$$

Manje uređivanje prethodnog izraza daje:

$$A \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{R_a}. \quad (3-21)$$

Svođenjem na zajednički nazivnik člana u zagradi daje:

$$A \frac{R_b - R_a}{R_a R_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{R_a}. \quad (3-22)$$

Iz prethodnog izraza proizlazi da konstanta A glasi:

$$A = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{R_b}{R_b - R_a}. \quad (3-23)$$

Uvrštavanje (3-23) u (3-19) daje izraz za skalarni električni potencijal u prostoru ograničenom vanjskom plohom unutarnje kugle i unutarnjom plohom vanjske kugle $R_a \leq r \leq R_b$ [7-9]:

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{R_b}{R_b - R_a} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_b} \right). \quad (3-24)$$

Izraz za skalarni električni potencijal $\varphi(r)$ geometrije prikazane slikom 3.3 za sva područja duž koordinate r može se ishoditi korištenjem izraza (3-24) uz uvažavanje da je u svakom dijelu prostora zauzetom vodljivim materijalom skalarni električni potencijal konstantan (u ovom slučaju te su konstante različite). Odnosno, u prostoru ispunjenom materijalom manje

kugle te u tankom sloju prostora kojeg ispunjava materijal veće vodljive kugle. Električni potencijal geometrije prikazane slikom 3.3 glasi:

$$\varphi = \varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{R_a}, & \text{za } 0 \leq r \leq R_a, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{R_b}{R_b - R_a} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_b} \right), & \text{za } R_a \leq r \leq R_b, \\ 0, & \text{za } R_b \leq r \leq R_c. \end{cases} \quad (3-25)$$

Jednom kada je poznat potencijal može se odrediti električno polje koje je negativni gradijent potencijala [2-6]:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (3-26)$$

S obzirom na sfernu simetriju ove elektromagnetske zadaće, prethodni izraz pojednostavljuje i glasi:

$$\vec{E}(r) = -\hat{r} \cdot \frac{d\varphi}{dr}. \quad (3-27)$$

Uvažavanjem da u elektrostatici u prostoru ispunjenom vodljivim materijalom nema električnog polja, odnosno električno polje jednako je nuli, električno je polje potrebno odrediti samo za područje ograničeno vanjskom plohom manje kugle i unutarnjom plohom veće kugle $R_a \leq r \leq R_b$. Uvrštavanjem izraza (3-24) u izraz (3-27) daje:

$$\vec{E}(r) = -\hat{r} \cdot \frac{d}{dr} \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{R_b}{R_b - R_a} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_b} \right) = -\hat{r} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{R_b}{R_b - R_a} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_b} \right). \quad (3-28)$$

Derivacija člana u uglatoj zagradi po varijabli r glasi:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_b} \right) = -\frac{1}{r^2}. \quad (3-29)$$

Uvrštavanjem (3-29) u izraz (3-28) daje izraz za električno polje u području ograničenom vanjskom plohom manje kugle i unutarnjom plohom veće kugle $R_a \leq r \leq R_b$ [7-9]:

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{R_b}{R_b - R_a} \frac{\hat{r}}{r^2}. \quad (3-30)$$

Uvažavanjem da u prostoru ispunjenom vodljivim materijalom nema električnog polja, odnosno električno polje jednako je nuli te da u prostoru izvan vanjske plohe veće kugle nema električnog polja jer je vanjska kugla uzemljena, izraz za električno polje u svim područjima duž koordinate r glasi:

$$\vec{E} = \vec{E}(r) = \begin{cases} 0, & \text{za } 0 \leq r < R_a, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{R_b}{R_b - R_a} \frac{\hat{r}}{r^2}, & \text{za } R_a \leq r \leq R_b, \\ 0, & \text{za } R_b < r < R_c, \\ 0, & \text{za } R_c \leq r. \end{cases} \quad (3-31)$$

Odnos jakosti električnog polja kada je prisutna veća kugla i kada je nema

Poznavanjem izraza koji opisuju promjenu jakosti električnog polja za prethodna dva slučaja, mogu se analitičkim putem usporediti polja i odrediti odnos električnih polja u području $R_a \leq r \leq R_b$ koncentričnih kugli različitih polumjera kada je veća vanjska kugla uzemljena i slučaja kada je prisutna samo manja kugla.

U slučaju koncentričnih kugli, električno polje opisano je izrazom:

$$E_{\text{koncentričnih kugli}}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{R_b}{R_b - R_a} \frac{1}{r^2}. \quad (3-32)$$

Kada je manja kugla osamljena, električno polje dano je izrazom:

$$E_{\text{osamljena kugla}}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2}. \quad (3-33)$$

Usporedbom prethodnih dvaju izraza, može se primijeti da vrijedi:

$$E_{\text{koncentričnih kugli}}(r) = E_{\text{osamljena kugla}}(r) \cdot \frac{R_b}{R_b - R_a}. \quad (3-34)$$

Korištenjem prethodnog izraza može se odrediti omjer:

$$\frac{E_{\text{koncentričnih kugli}}(r)}{E_{\text{osamljena kugla}}(r)} = \frac{R_b}{R_b - R_a}. \quad (3-35)$$

Kako je $R_b > R_a$, vrijedi:

$$\frac{R_b}{R_b - R_a} > 1. \quad (3-36)$$

Navedeno omogućava da se odnos jakosti polja zapiše u obliku:

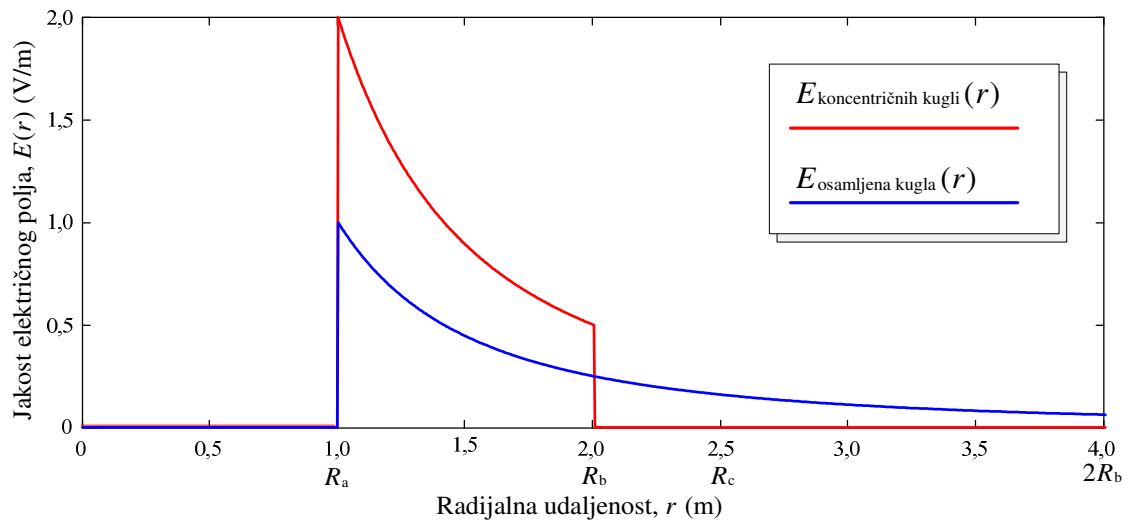
$$\frac{E_{\text{koncentričnih kugli}}(r)}{E_{\text{osamljena kugla}}(r)} = \frac{R_b}{R_b - R_a} > 1. \quad (3-37)$$

Električno polje u prostoru između vanjske plohe manje kugle i unutarnje plohe veće kugle dvaju koncentričnih kugli različitih polumjera kada je veća (vanjska) kugla uzemljena je veće jakosti (intenziteta), negoli što bi bilo kada veća (vanjska) kugla ne bi postojala.

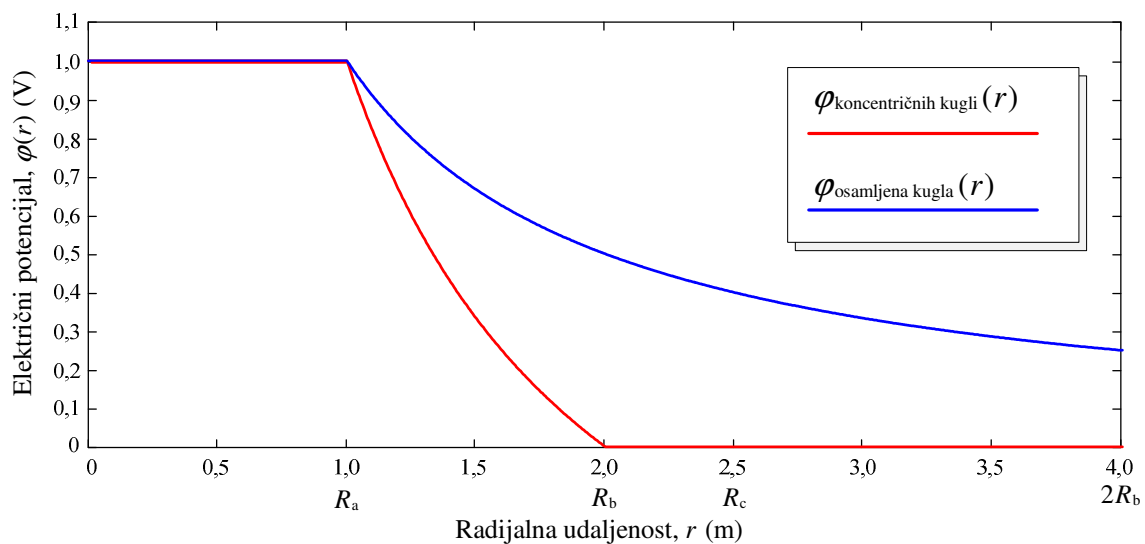
Numerički primjer

Za zorno grafičko prikazivanje funkcije ovisnosti električnog polja i potencijala o radijalnoj koordinati r pogodno je normirati jakost električnog polja i električni potencijal. U tu svrhu neka je $R_a = 1$ m, $R_b = 2$ m, $R_c = 2,5$ m, a količina naboja q pozitivna i takva da je $q/4\pi\epsilon_0 = 1$. Iz navedenih podataka, prema izrazu (3-35), proizlazi da je $R_b/(R_b - R_a) = 2/(2-1) = 2$ te je jakost električnog polja na površini unutarnje kugle dvostruko veća u slučaju dviju koncentričnih kugli različitih polumjera kada je veća kugla uzemljena, negoli što bi bila jakost električnog polja kada veća (vanjska) kugla ne bi postojala, odnosno, kada bi manja (unutarnja) nabijena kugla bila osamljena u prostoru.

Koristeći se izrazima (3-25) i (3-31) te navedenim iznosima geometrijskih podataka i fizikalnih veličina dobiveni su grafički prikazi promjene jakosti električnog polja i skalarnog električnog potencijala (slika 3.4 i slika 3.5.).



Slika 3.4 Jakost električnog polja u funkciji radijalne udaljenost za slučaj koncentričnih kugli različitih polumjera kada je veća (vanjska) kugla uzemljena i slučaj kada je manja nabijena kugla osamljena u prostoru.



Slika 3.5 Skalarni električni potencijal u funkciji radijalne udaljenosti za slučaj koncentričnih kugli različitih polumjera kada je veća (vanjska) kugla uzemljena i slučaj kada je manja nabijena kugla osamljena u prostoru.

Više o elektrostatici i numeričkim primjerima za vježbu, zainteresirani čitatelj može pronaći u dodatnoj preporučenoj literaturi [10-14].

Popis literature

- [1] *Hrvatska enciklopedija*, „Elektrostatika“, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, mrežno izdanje, 2013. – 2025. Dostupno na: <https://www.enciklopedija.hr/clanak/elektrostatika>, (pristupljeno 30. 1. 2025.)
- [2] Edward M. Purcell: *Elektricitet i magnetizam*. Udžbenik fizike Sveučilišta u Berkeleyu (svezak 2), Zagreb, Tehnička knjiga, 1988.
- [3] Edward M. Purcell, David J. Morin, *Electricity and Magnetism*, 3. Izdanje, Cambridge: Cambridge University Press, 2013. ISBN-13: 978-1107014022
- [4] Zijad Haznadar, Željko Štih, *Elektromagnetizam 1*, Zagreb: Školska knjiga, 1997. ISBN-13: 978-953-0-31634-8
- [5] Zijad Haznadar, Željko Štih, *Electromagnetic Fields, Waves, and Numerical Methods*, Amsterdam: IOS Press, 2000. ISBN-13: 978-1586030643
- [6] William H. Hayt Jr., John A. Buck, *Engineering Electromagnetics*, 6. izdanje. New York: McGraw-Hill Publishing Co., 2001. ISBN-13: 978-0071202299
- [7] Gerd Mrozynski, Matthias Stallein, *Electromagnetic Field Theory: A Collection of Problems*, Wiesbaden: Springer Vieweg, 2012. ISBN-13: 978-3834817112
- [8] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4. izdanje. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. ISBN-13: 978-1108420419
- [9] John David Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3. izdanje. New York: Wiley, 1998. ISBN-13: 978-0471309321

Preporučena literatura

- [10] Sead Berberović, *Teorijska elektrotehnika – odabrani primjeri*, Zagreb: Graphis-Zagreb, 1988. ISBN-10: 953-96399-9-9
- [11] Enver Šehović, Mladen Tkalić, Ivan Felja, *Osnove elektrotehnike: zbirka primjera*, Zagreb: Školska knjiga, 1992. ISBN: 86-03-00637-7
- [12] Viktor Pinter, *Osnove Elektrotehnike, Knjiga prva*, Zagreb: Tehnička knjiga, 1994. ISBN: 953-172-005-3
- [13] Zoya Popović, Branko D. Popović, *Introductory Electromagnetics*, Boston: Addison-Wesley, 1999. ISBN-13: 978-0201326789
- [14] Patrick F. Kelly, *Electricity and Magnetism*, 1. izd., Boca Raton: CRC Press, 2021. ISBN-13: 978-0367783693

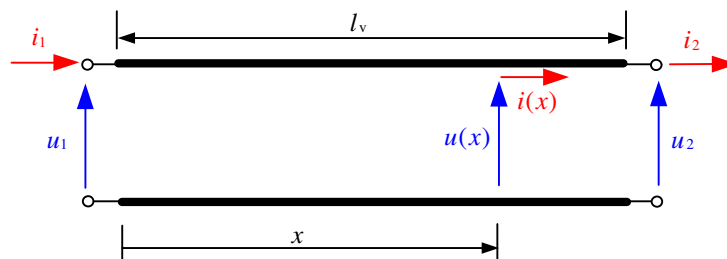
4. PARAMETRI I MODELI PRIJENOSNOG VODA

4.1 Parametri prijenosnog voda

Pod pojmom prijenosni vod ili prijenosna linija (engl. *Transmission line*) naziva se sustav za prijenos električne energije ili informacija [1-3]. Karakteristični parametri prijenosnog voda pomoću kojih se definiraju električne prilike na vodu nazivaju se parametri voda [1-3]. Parametrima prijenosnog voda opisano je vladanje i karakteristike prijenosnih vodova kao što su dalekovodi, nadzemni vodovi, energetski nadzemni, podzemni ili podvodni kabeli, koaksijalni kabeli, telefonske parice ili bilo kojeg drugog žičanog sustava za prijenos električne energije ili informacija. Uobičajeno se parametri prijenosnog voda dijele na **primarne (elementarne)** i **sekundarne (izvedene)** parametre koji proistječu iz primarnih parametara [4-6]. Parametri voda sadrže brojčane vrijednosti koje ovise o svojstvima materijala od kojih su vodovi načinjeni, zatim o okolini koja ga okružuje, međusobnim geometrijskom odnosima dijelova voda te geometrijskim odnosima dijelova voda prema okolini [4-7]. Određeni parametri voda podložni su utjecaju okoline, među kojima se posebno ističu promjena temperature i vlažnosti zraka. **Primarni parametri voda** su uobičajeno navedeni po jedinici duljine voda, po kilometru (ili metru) i po jednoj fazi, a u njih se ubraja [4-7]:

- jedinični djelatni otpor: R_1 [Ω/km], ▪ jedinični induktivitet: L_1 [H/km],
- jedinični kapacitet: C_1 [F/km], jedinična vodljivost: G_1 [S/km].

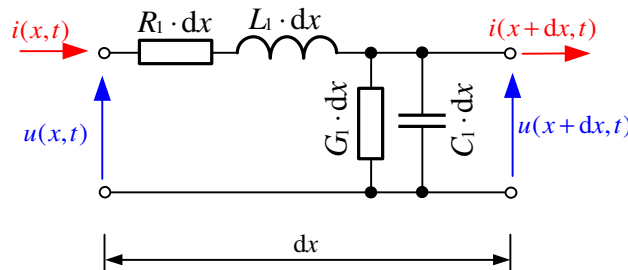
Sva četiri parametra raspoređena su kontinuirano uzduž voda, stoga po volji maleni dio (djelić) voda sadrži njih sva četiri primarna parametra voda [1-3]. Uobičajeno se poznaju napon i struja na početku ili završetku voda, a od tehničkog je značaja poznavanje napona $u(x, t)$ na vodu na poziciji x u trenutku t te struje $i(x, t)$ duž voda na poziciji x i u trenutku t (slika 4.1 [1]). Kada se simbolički ukazuje da se određeni sustav za prijenos energije ili informacija predstavlja kao prijenosni vod koristi se grafički prikaz kao što je na slici 4.1.



Slika 4.1 Model prijenosnog voda duljine l_v , napon i struja na početku voda (u_1, i_1), napon i struja na završetku voda (u_2, i_2), napon i struja na poziciji x ($u(x), i(x)$).

Model prijenosnog voda (slika 4.1 [1]) koristi se kada je potrebno uvažiti **valne fenomene** na vodu. Na primjer, kada je potrebno uvažiti refleksije naponskih i strujnih valova na vodu uslijed promjene valne impedancije ili uspostavu stojnih valova na vodu. Također, mogu biti od interesa i valni fenomeni kao što su promjena faze vala, deformacija putujućeg vala ili konačna brzina kretanja vala.

Do izraza koji opisuju promjenu napona $u(x,t)$ i struje $i(x,t)$ duž voda može se doći na sljedeći način. Neka je neki određeni vod (duljine l_v) protegnut duž x osi, a njegov maleni djelić (duljine dx) predstavljen odgovarajućom shemom koja sadrži primarne parametre voda, na primjer shemom kao što je prikazano slikom 4.2 [1]. Simbolički prikaz voda duljine l_v predstavljenog modelom prijenosnog voda (slika 4.1) podrazumijeva da na njegovoj diferencijalno malenoj jedinici duljine vrijedi model prikazan na slici 4.2, odnosno njime je predstavljen beskonačni niz „gama shema“.



Slika 4.2 Mrežni model djelića (oznaka dx) prijenosnog voda poznat pod nazivom gama shema (slični na grčko slovo gama) s primarnim parametrima voda.

Napon i struja u trenutku t na početku djelića prijenosnog voda prikazanog shemom na slici 4.2 označeni su s $u(x,t)$ i $i(x,t)$, a napon i struja u trenutku t na završetku djelića prijenosnog voda prikazanog shemom na slici 4.2 označeni su s $u(x+dx,t)$ i $i(x+dx,t)$. Primjena Kirchhoffovih zakona za napon na mrežu prikazanu slikom 4.2 daje [7]:

$$u(x,t) - (R_1 \cdot dx) \cdot i(x,t) - (L_1 \cdot dx) \cdot \frac{\partial}{\partial t} i(x,t) - u(x+dx,t) = 0. \quad (4-1)$$

Preuređivanje prethodnog izraza daje

$$-\frac{u(x+dx,t) - u(x,t)}{dx} = R_1 \cdot i(x,t) + L_1 \cdot \frac{\partial}{\partial t} i(x,t). \quad (4-2)$$

Uzimanjem granične vrijednosti kada dx teži nuli ($dx \rightarrow 0$), lijeva strana spram znaka jednakosti izraza (4-2) odgovara derivaciji po varijabli x te se izraz (4-2) može napisati u obliku:

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R_1 \cdot i(x,t) + L_1 \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}. \quad (4-3)$$

Primjena Kirchhoffovih zakona za struju na mrežu prikazanu slikom 4.2 daje:

$$i(x,t) - (G_1 \cdot dx) \cdot u(x+dx,t) - (C_1 \cdot dx) \cdot \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} - i(x+dx,t) = 0. \quad (4-4)$$

Preuređivanje prethodnog izraza daje

$$-\frac{i(x+dx,t) - i(x,t)}{dx} = G_1 \cdot u(x+dx,t) + C_1 \cdot \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t}. \quad (4-5)$$

Uzimanjem granične vrijednosti kada dx teži nuli ($dx \rightarrow 0$), lijeva strana spram znaka jednakosti prethodnog izraza odgovara derivaciji po varijabli x te ujedno vrijedi $\lim_{dx \rightarrow 0} u(x+dx,t) = u(x,t)$. Uvažavanjem navedenog izraz (4-5) može se napisati u obliku:

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G_1 \cdot u(x,t) + C_1 \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \quad (4-6)$$

Sumarno, strujno-naponske prilike na prijenosnom vodu opisane su izrazima (4-3) i (4-6) te se uobičajeno navode zajedno [7]:

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R_1 \cdot i(x,t) + L_1 \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}, \quad (4-7)$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G_1 \cdot u(x,t) + C_1 \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \quad (4-8)$$

Prethodne dvije parcijalne diferencijalne jednačbe koje opisuju kretanje naponskih i strujnih valova duž prijenosnog voda nazivaju se **telegrafske jednačbe** (engl. *Telegrapher's equations*) [7]. Ime ovog skupa parcijalnih diferencijalnih jednačbi potječe iz vremena kada su te jednačbe razvijene i služile za analizu rada telegrafa, prvog električnog sredstva za komunikaciju na daljinu. Prethodne jednačbe nazivaju se još i **valne jednačbe** (engl. *Wave equations*) jer opisuju kretanje naponskih i strujnih valova duž prijenosnog voda.

Prethodna dva izraza napisana u frekvencijskoj domeni glase [7]:

$$-\frac{\partial \underline{U}(x)}{\partial x} = R_1 \cdot \underline{I}(x) + L_1 \cdot \frac{\partial \underline{I}(x)}{\partial t}, \quad (4-9)$$

$$-\frac{\partial \underline{I}(x)}{\partial x} = G_1 \cdot \underline{U}(x) + C_1 \cdot \frac{\partial \underline{U}(x)}{\partial t}. \quad (4-10)$$

Kako je $\partial \underline{I}(x) / \partial t = j\omega \cdot \underline{I}(x)$, $\partial \underline{U}(x) / \partial t = j\omega \cdot \underline{U}(x)$, prethodna dva izraza mogu se napisati u obliku

$$-\frac{\partial \underline{U}(x)}{\partial x} = (R_1 + j\omega L_1) \cdot \underline{I}(x), \quad (4-11)$$

$$-\frac{\partial \underline{I}(x)}{\partial x} = (G_1 + j\omega \cdot C_1) \cdot \underline{U}(x). \quad (4-12)$$

Uvođenjem zamjena

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1, \quad (4-13)$$

$$\underline{Y}_1 = G_1 + j\omega \cdot C_1, \quad (4-14)$$

gdje je \underline{Z}_1 jedinična uzdužna impedancija (Ω/m), \underline{Y}_1 jedinična poprečna admitancija (S/m), a izrazi (4-11) i (4-12) mogu se jezgrovitije zapisati u obliku:

$$-\frac{\partial \underline{U}(x)}{\partial x} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}(x), \quad (4-15)$$

$$-\frac{\partial \underline{I}(x)}{\partial x} = \underline{Y}_1 \cdot \underline{U}(x). \quad (4-16)$$

Uklanjanjem jedne od varijabli ($\underline{U}(x)$ ili $\underline{I}(x)$), prethodna dva izraza mogu se napisati i u obliku:

$$\frac{\partial^2 \underline{U}(x)}{\partial x^2} - \underline{Z}_1 \underline{Y}_1 \cdot \underline{U}(x) = 0, \quad (4-17)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{I}(x)}{\partial x^2} - \underline{Z}_1 \underline{Y}_1 \cdot \underline{I}(x) = 0. \quad (4-18)$$

Produkt $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Y}_1$ uobičajeno se označava s γ^2 te vrijedi [1-7]:

$$\gamma = \sqrt{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Y}_1} = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} \quad (4-19)$$

gdje je γ kompleksna konstanta prostiranja (engl. *Propagation constant*), koja je po značenju kompleksna fizikalna veličina koja opisuje na koji način duž svog kretanja val slabi i mijenja fazu (kut), a koja se može zapisati i kao $\gamma = \alpha + j \cdot \beta$, gdje je α koeficijent atenuacije, naziva se još i prigušna konstanta (Np/m), a β je fazna konstanta (rad/m). **Napomena!** Iako je γ kompleksna fizikalna veličina, nije ju uobičajeno podcrtavati.

Korištenjem kompleksne konstante prostiranja, izrazi (4-17) i (4-18) mogu se zapisati na način:

$$\frac{\partial^2 \underline{U}(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 \cdot \underline{U}(x) = 0, \quad (4-20)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{I}(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 \cdot \underline{I}(x) = 0. \quad (4-21)$$

Rješenja prethodne dvije diferencijalne jednadžbe glase:

$$\underline{U}(x) = U_{(+)} \cdot e^{-\gamma x} + U_{(-)} \cdot e^{\gamma x}, \quad (4-22)$$

$$\underline{I}(x) = I_{(+)} \cdot e^{-\gamma x} + I_{(-)} \cdot e^{\gamma x} \quad (4-23)$$

gdje je $U_{(+)}$ amplituda naponskog vala koji se kreće u smjeru rastuće prostorne varijable x , odnosno od izvora prema opterećenju, $U_{(-)}$ amplituda naponskog vala koji se kreće u smjeru padajućeg x , odnosno od opterećenja unatrag prema izvoru.

Koristeći se telegrafskom jednadžbom (4-15), izraz za struju duž prijenosnog voda glasi:

$$\underline{I}(x) = -\frac{1}{Z_1} \frac{\partial \underline{U}(x)}{\partial x}. \quad (4-24)$$

Parcijalna derivacija napona po varijabli x dobiva se deriviranjem izraza (4-23) po varijabli x :

$$\frac{\partial \underline{U}(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (U_{(+)} \cdot e^{-\gamma x} + U_{(-)} \cdot e^{\gamma x}) = -\gamma \cdot U_{(+)} \cdot e^{-\gamma x} + \gamma \cdot U_{(-)} \cdot e^{\gamma x}. \quad (4-25)$$

Uvrštavanjem dobivenog rješenja parcijalne derivacije napona po varijabli x u izraz (4-24) daje izraz za fazor struje duž voda na poziciji x :

$$\underline{I}(x) = \frac{\gamma}{Z_1} (U_{(+)} \cdot e^{-\gamma x} + U_{(-)} \cdot e^{\gamma x}). \quad (4-26)$$

Prethodni izraz uobičajeno je zapisati na način:

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{Z_0} (U_{(+)} \cdot e^{-\gamma x} + U_{(-)} \cdot e^{\gamma x}) \quad (4-27)$$

gdje je Z_0 karakteristična impedancija prijenosnog voda (Ω), a glasi [1-7]:

$$\underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Y}_1}} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega \cdot C_1}} \quad (4-28)$$

Ujedno, karakteristična impedancija definirana je i kao omjer fazora napona i fazora struje koji se širi samo u jednom smjeru duž prijenosnog voda, bez refleksije [1]:

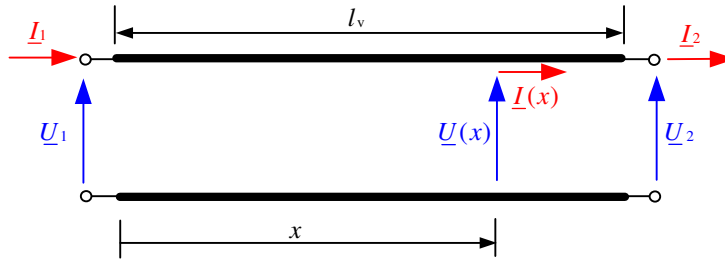
$$\underline{Z}_0 = \frac{U_{(+)}}{I_{(+)}} \quad (4-29)$$

Stoga, karakteristična impedancija ima značenje **valne impedancije** koju „vide“ naponski i strujni valovi duž kretanja po prijenosnom vodu.

4.2 Sekundarni (izvedeni) parametri voda

Koristeći se primarnim parametrima voda u ovom su poglavlju izvedeni dodatni (sekundarni) parametri voda [4]: **karakteristična impedancija** (Z_0) (valni otpor, valna impedancija) koja opisuje odnos između napona vala i struje vala kroz sredinu kojom se val kreće, odnosno duž voda, **kompleksna konstanta prostiranja** (γ) koja opisuje na koji način duž svog kretanja val slabi i mijenja fazu (kut), **faktor prigušenja** α koji opisuje slabljenje signala ili energije duž voda te **faktor faznog pomaka** β koji opisuje promjenu faze vala po jedinici prijeđenog puta.

Koristeći se izrazima (4-22) i (4-23) moguće je svesti jednadžbe na oblike u kojima je izgubljen direktan uvid u valni karakter napona i struje duž prijenosnog voda (slika 4.3), ali dobiva se oblik jednadžbi koji je praktičniji s inženjerskog gledišta. Postupak dobivanja takvog oblika jednadžbi kada su poznate strujno-naponske prilike na početku ili završetku prijenosnog voda detaljno je opisan u [7].



Slika 4.3 Model prijenosnog voda duljine l_v , fazori napona i struje na početku voda označeni su s $(\underline{U}_1, \underline{I}_1)$, na završetku voda s $(\underline{U}_2, \underline{I}_2)$, a na poziciji x s $(\underline{U}(x), \underline{I}(x))$.

Oblik jednadžbi kada su poznate strujno-naponske prilike na početku prijenosnog voda [7]:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \cdot \text{ch}(\gamma x) - \underline{Z}_0 \cdot \underline{I}_1 \cdot \text{sh}(\gamma x), \quad (4-30)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_1 \cdot \text{ch}(\gamma x) - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_0} \cdot \text{sh}(\gamma x). \quad (4-31)$$

Oblik jednadžbi kada su poznate strujno-naponske prilike na kraju prijenosnog voda [7]:

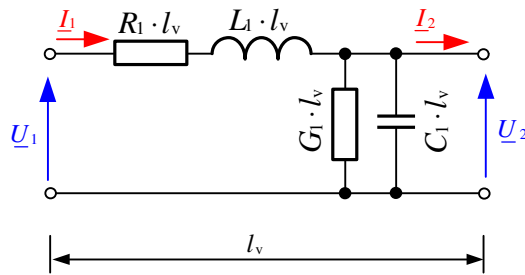
$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cdot \text{ch}(\gamma x) + \underline{Z}_0 \cdot \underline{I}_2 \cdot \text{sh}(\gamma x), \quad (4-32)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_2 \cdot \text{ch}(\gamma x) + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0} \cdot \text{sh}(\gamma x) \quad (4-33)$$

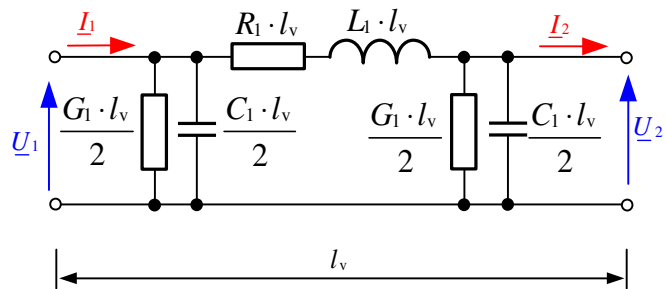
gdje je \underline{U}_1 fazor napona na početku voda ($x=0$), \underline{I}_1 fazor struje na početku voda ($x=0$), \underline{U}_2 fazor napona na završetku voda ($x=l_v$), \underline{I}_2 fazor struje na završetku voda ($x=l_v$), \underline{Z}_0 karakteristična impedancija prijenosnog voda, γ kompleksna konstanta prostiranja.

Slučaj kada je duljina voda znatno kraća od valne duljine napona i struje

Kada je duljina voda (l_v) znatno kraća od valne duljine (λ) napona i struje (uobičajeno se uzima kriterij kada je $l_v \leq (1/10) \cdot \lambda$), tada se mogu zanemariti valni fenomeni te se vod može predstaviti ekvivalentnom shemom s koncentriranim parametrima. U tu svrhu najčešće se koriste tzv. gama shema (slični na grčko slovo gama „ Γ “, a prikazana je na slici 4.4 [7]) i tzv. pi shema (slični na grčko slovo pi „ Π “) koja je prikazana na slici 4.5 [7].



Slika 4.4 Prijenosni vod predstavljen gama shemom.



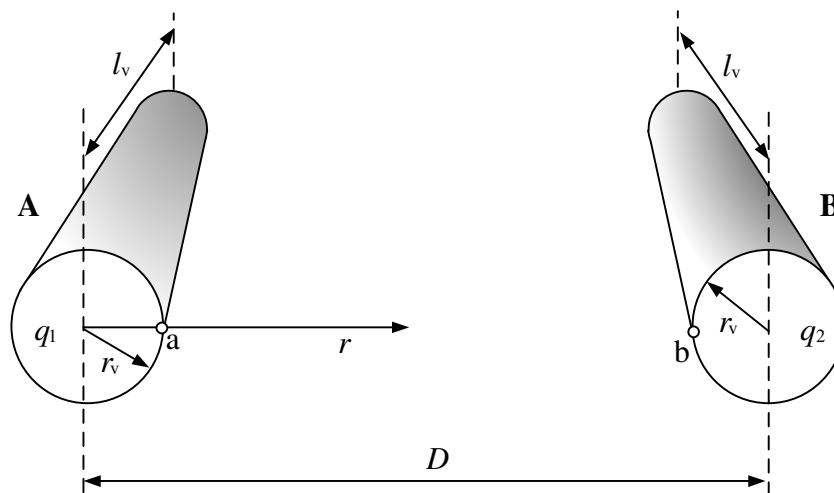
Slika 4.5 Prijenosni vod predstavljen pi shemom.

Uobičajeno je napone i struje na početku prijenosnog voda označavati indeksom jedan, a na završetku prijenosnog voda (na strani tereta) napone i struje indeksom 2. Sukladno navedenom, s \underline{U}_1 i \underline{I}_1 označeni su fazori napona i struje na početku prijenosnog voda, a s \underline{U}_2 i \underline{I}_2 označeni su fazori napona i struje na završetku voda. Primarni parametri voda označeni su s R_1 , L_1 , G_1 i C_1 , a duljina voda s l_v .

Iz aspekta točnosti rezultata nastalih modeliranjem prijenosnog voda gama i pi shemom, pi shema daje točnije rezultate u odnosu na gama shemu.

4.3 Određivanje kapaciteta prijenosnog voda

Na prethodnim stranicama opisana je uloga i važnost primarnih parametara prijenosnog voda u određivanju strujno-naponskih prilika duž prijenosnog voda. U nastavku ovog poglavlja fokus će biti na određivanju kapaciteta prijenosnog voda. U tu svrhu koristit će se primjer jednofaznog voda s dvama vodičima (slika 4.6). Postupak određivanja kapaciteta prijenosnog voda bit će podijeljen na postupke određivanja **međusobnog kapaciteta**, **dozemnog kapaciteta i pogonskog kapaciteta**. Jednofazni prijenosni vod prikazan na slici 4.6 sastoji se od dvaju ravnih paralelnih vodiča (oznake A i B) okruženih zrakom (zračni vod). Utjecaj zemlje i drugih vodljivih tijela u prostoru zanemareni su. Oba vodiča imaju jednak polumjer r_v i jednaku duljinu l_v . Vodiči su nabijeni jednakom količinom naboja suprotnog predznaka. Međusobni razmak, odnosno razmak između osi vodiča označen je s D .



Slika 4.6 Jednofazni prijenosni vod s dvama vodičima.

4.4 Određivanje međusobnog kapaciteta

Kapacitet između dvaju vodljivih tijela određen je izrazom [2, 3]:

$$C = \frac{q}{u} \quad (4-34)$$

gdje je q količina naboja (As ili C), u napon (razlika potencijala) između vodljivih tijela (V).

Prema izrazu (4-34), kako bi se odredio međusobni kapacitet između dvaju ravnih, tankih cilindričnih vodiča prikazanih slikom 4.6, potrebno je odrediti napon između lijevog i desnog vodiča prikazanih slikom 4.6 uslijed naboja kojima su vodiči nabijeni.

Napon između lijevog i desnog vodiča prikazanih slikom 4.6 bit će određen kao razlika skalarnog električnog potencijala između točke „a“ na površini lijevog vodiča označenog s „A“ i točke „b“ na površini desnog vodiča označenog s „B“. Skalarni električni potencijal u prostoru oko ravnog, tankog, cilindričnog i nabijenog osamljenog vodiča u prostoru određen je izrazom [2, 3]:

$$\varphi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r} \quad (4-35)$$

gdje je r radijalna udaljenost točke u kojoj se promatra potencijal (m), r_{ref} radijalna udaljenost točke referentnog nultog potencijala (m), λ linijska gustoća naboja (As/m ili C/m), ϵ_0 permitivnost vakuumu koja iznosi $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m.

Linijska gustoća naboja (λ) i količina naboja (q) na vodiču duljine l_v vezane su izrazom [2, 3]:

$$\lambda = q / l_v. \quad (4-36)$$

Neka je s λ_A označena linijska gustoća naboja na lijevom vodiču, a s λ_B linijska gustoća naboja na desnom vodiču, koristeći se izrazom (4-35), mogu se napisati izrazi za skalarnu električne potencijale točaka a i b:

$$\varphi_a = \frac{\lambda_A}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r_v} + \frac{\lambda_B}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{D - r_v}, \quad (4-37)$$

$$\varphi_b = \frac{\lambda_B}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r_v} + \frac{\lambda_A}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{D - r_v}. \quad (4-38)$$

Kada su naboji na vodičima istog iznosa $|\lambda_A| = |\lambda_B| = \lambda$, a suprotnog predznaka ($\lambda_A = -\lambda_B$), izrazi za potencijale pojednostavljuju se i glase:

$$\varphi_a = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r_v} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{r_{\text{ref}}}{D - r_v}, \quad (4-39)$$

$$\varphi_b = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r_v} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{r_{\text{ref}}}{D - r_v}. \quad (4-40)$$

Ujedno vrijedi:

$$\varphi_a = -\varphi_b. \quad (4-41)$$

Napon između točaka „a“ i „b“ odgovara razlici potencijala između točaka „a“ i „b“ :

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b. \quad (4-42)$$

Uvažavanjem (4-41), izraz za napon između točaka „a“ i „b“ pojednostavljuje se i glasi:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \varphi_a - (-\varphi_a) = 2\varphi_a. \quad (4-43)$$

Uvrštavanjem (4-39) u (4-43) daje:

$$U_{ab} = 2 \cdot \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r_v} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{r_{\text{ref}}}{D - r_v} \right) = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r_v} - \frac{\lambda}{\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{r_{\text{ref}}}{D - r_v}. \quad (4-44)$$

Kako je u praksi uvijek $D \gg r_v$, prethodni se izraz može pojednostaviti i glasi:

$$U_{ab} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r_v} - \frac{\lambda}{\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{r_{\text{ref}}}{D}. \quad (4-45)$$

Koristeći se svojstvom logaritma, prema kojemu je $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$, prethodni se izraz može zapisati u obliku:

$$U_{ab} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r_v} \frac{D}{r_{\text{ref}}} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{D}{r_v}. \quad (4-46)$$

Kombiniranje izraza (4-36) i (4-46) daje:

$$U_{ab} = \frac{q}{l_v} \cdot \frac{1}{\pi \varepsilon_0} \cdot \ln \frac{D}{r_v}. \quad (4-47)$$

Preuređivanje prethodnog izraza daje:

$$\frac{q}{U_{ab}} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \pi \cdot l_v}{\ln \frac{D}{r_v}}. \quad (4-48)$$

Usporedbom prethodnog izraza s izrazom za kapacitet između dvaju vodljivih tijela (4-34), uočava se da prethodni izraz odgovara **međusobnom kapacitetu** između lijevog vodiča označenog s „A“ i desnog vodiča označenog s „B“, tj. [8-10]:

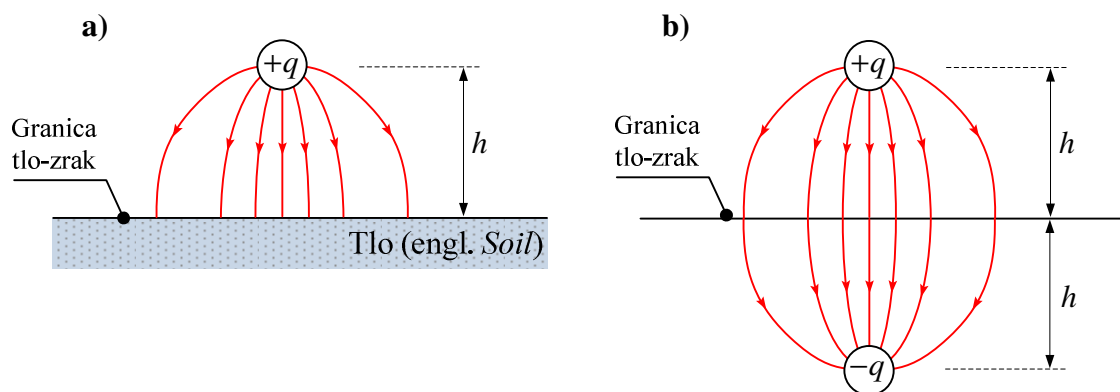
$$C_m = \frac{\varepsilon_0 \cdot \pi \cdot l_v}{\ln \frac{D}{r_v}} \quad (F). \quad (4-49)$$

Međusobni kapacitet po jedinici duljine jednofaznog zračnog prijenosnog voda dobiva se dijeljenjem prethodnog izraza s duljinom vodiča (l_v) te glasi [8-10]:

$$C_{m,l} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \pi}{\ln \frac{D}{r_v}} \left(\frac{F}{m} \right). \quad (4-50)$$

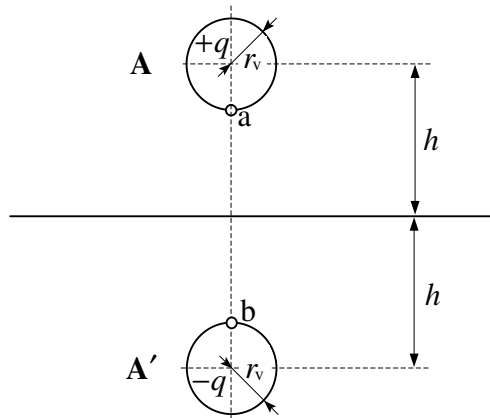
4.5 Utjecaj zemlje na kapacitet prijenosnog voda, određivanje kapaciteta prema zemlji (dozemni kapacitet)

Prethodno određeni međusobni kapacitet mogao bi se smatrati jednim od primarnih parametara prijenosnog voda (kapacitet voda) kada bi par vodiča jednofaznog prijenosnog voda prikazanih slikom 4.6 bio osamljen par vodiča u prostoru, odnosno kada u prostoru ne bi bilo drugih vodljivih tijela. Međutim, vodiči jednofaznog zračnog voda nalaze se iznad električno neutralnog tla koje je ujedno i električno vodljivo. Radi toga, naboji na vodičima jednofaznog prijenosnog voda elektrostatskom indukcijom (električnom influencijom) [2, 3] djeluju na naboje u električno neutralnom i vodljivom tlu te se naboje u tlu preraspodjeljuju na način da se na površini tla u području ispod obaju vodiča zračnog voda uspostavlja povećana koncentracija naboja suprotnog predznaka u odnosu na naboje na vodičima zračnog voda. Plošna gustoća naboja na površini tla nastala elektrostatskom indukcijom nije jednolika te je najveća ispod vodiča jednofaznog zračnog voda. Električno polje u prostoru iznad tla rezultat je naboja na vodičima i induciranog naboja na površini tla. Na primjer, električno polje ispod jednog vodiča zračnog voda nabijenog pozitivnim nabojem izgleda kao što je prikazano na slici 4.7a. Električno polje iznad tla prikazano na slici 4.7a u potpunosti je jednako polju koje bi se uspostavilo u prostoru kada bi u njemu bila dva ravna paralelna cilindrična vodiča nabijena nabojima suprotnog predznaka, a koja su međusobno razmaknuta na udaljenost koja odgovara dvostrukoj visini vodiča od tla (slika 4.7b). Navedena spoznaja omogućava primjenu metode odslikavanja, poznata i kao metoda slika (engl. *Method of images*) [1, 2] za određivanje kapaciteta voda prema zemlji.



Slika 4.7 a) Nabijeni ravni horizontalni vodič iznad tla i električno polje, b) električno polje u prostoru između dvaju ravnih horizontalnih vodiča nabijenih jednakim nabojima, ali suprotnih predznaka.

Za potrebe analitičkog određivanja kapaciteta vodiča nadzemnog voda prema zemlji primjenom metode odslikavanja, na slici 4.8 detaljnije je prikazana geometrija vodiča, njegova slika i relevantne geometrijske veličine. S obzirom da kapacitet vodiča nadzemnog voda spram zemlje odgovara kapacitetu vodiča nadzemnog voda spram njegove slike, postupak određivanja kapaciteta vodiča nadzemnog voda spram zemlje analogan je prethodno prikazanom postupku određivanja međusobnog kapaciteta.



Slika 4.8 Ravni dugi cilindrični vodič i njegova zrcalna slika spram granice tlo-zrak.

Neka je vodič nadzemnog voda (oznaka A na slici 4.8) nabijen pozitivnim nabojem (q), što odgovara pozitivnoj linijskoj gustoći naboja (λ), tada je njegova zrcalna slika (oznaka A' na slici 4.8) nabijena jednakom količinom negativnih naboja ($-q$), što odgovara negativnoj linijskoj gustoći naboja ($-\lambda$). Koristeći se izrazom (4-35) i geometrijskim odnosima na slici 4.8 dobivaju se izrazi za skalarnu električne potencijale u točkama „a“ i „b“:

$$\varphi_a = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r_v} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{2h - r_v}, \quad (4-51)$$

$$\varphi_b = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r_v} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{2h - r_v}. \quad (4-52)$$

Kako je visina vodiča iznad tla puno veća od njegovog polumjera $h \gg r_v$, vrijedi $2h - r_v \approx 2h$ te se prethodni izrazi mogu pojednostaviti i glase:

$$\varphi_a = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r_v} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{2h}, \quad (4-53)$$

$$\varphi_b = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r_v} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{2h}. \quad (4-54)$$

Usporedbom prethodnih dvaju izraza može se opaziti da vrijedi:

$$\varphi_a = -\varphi_b. \quad (4-55)$$

Napon između točaka „a“ i „b“ odgovara razlici potencijala između točaka „a“ i „b“ :

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b. \quad (4-56)$$

Uvažavanjem (4-55), izraz za napon između točaka „a“ i „b“ pojednostavljuje se i glasi

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \varphi_a - (-\varphi_a) = 2\varphi_a. \quad (4-57)$$

Uvrštavanje (4-53) u (4-57) daje izraz za napon između točaka „a“ i „b“:

$$U_{ab} = 2 \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r_v} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{2h} \right). \quad (4-58)$$

Nakon sređivanja prethodnog izraza dobiva se:

$$U_{ab} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r_v} - \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{2h}. \quad (4-59)$$

Korištenjem svojstva logaritma $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$, prethodni izraz može se zapisati u obliku:

$$U_{ab} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r_v} \frac{2h}{r_{\text{ref}}}. \quad (4-60)$$

Nakon kraćenja člana r_{ref} u obama razlomcima argumenta logaritma, dobiva se:

$$U_{\text{ab}} = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \ln \frac{2h}{r_v}. \quad (4-61)$$

Veza između linijske gustoće naboja i količine naboja na vodiču dana je izrazom $q = \lambda \cdot l_v$, što uvršteno u prethodni izraz daje:

$$U_{\text{ab}} = \frac{q}{\pi \epsilon_0 l_v} \ln \frac{2h}{r_v}. \quad (4-62)$$

Kombiniranje prethodnog izraza s izrazom (4-34) dobiva se izraz za **dozemni kapacitet (kapacitet prema zemlji)** vodiča zračnog voda [8-10]:

$$C_z = \frac{\epsilon_0 \cdot \pi \cdot l_v}{\ln \frac{2h}{r_v}} \text{ (F)}. \quad (4-63)$$

Jedinični dozemni kapacitet dobiva se dijeljenjem prethodnog izraza za dozemni kapacitet s duljinom vodiča (l_v) [8-10]:

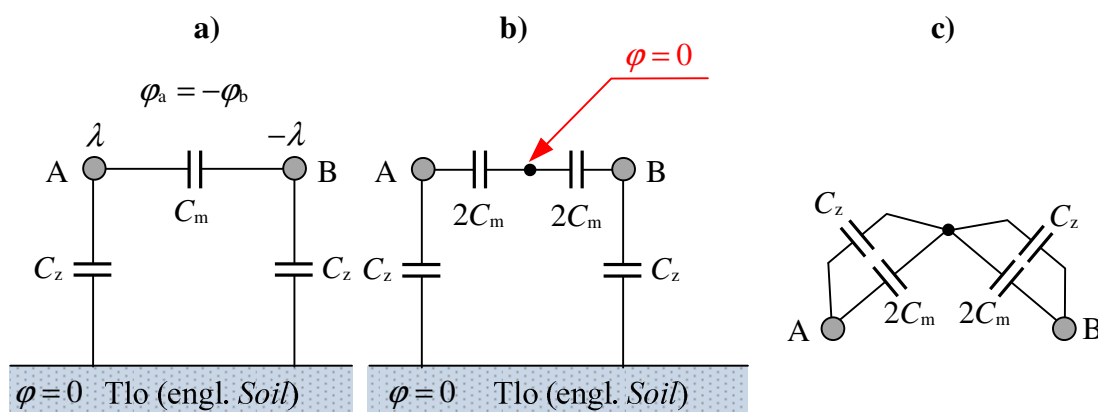
$$C_{z,1} = \frac{\epsilon_0 \cdot \pi}{\ln \frac{2h}{r_v}} \text{ (F/m)}. \quad (4-64)$$

4.6 Pogonski kapacitet jednofaznog nadzemnog voda

Pogonski kapacitet mjerodavan je kapacitet za modeliranje strujno naponskih prilika duž prijenosnog voda. Pogonski kapacitet ukupni (efektivni) je ekvivalentni kapacitet svake od faza prema zemlji uključujući utjecaj direktnog kapaciteta prema zemlji (dozemnog kapaciteta) i međusobnih kapaciteta u prijenosnom vodu. Pogonski kapacitet jednofaznog nadzemnog voda može se odrediti iz ekvivalentne sheme prikazane na slici 4.9a [10] u kojoj su prikazane kapacitivne veze obaju vodiča jednofaznog nadzemnog voda s okolinom (međusobni kapacitet i dozemni kapaciteti). Uzimanjem u obzir da su lijevi i desni vodič jednofaznog nadzemnog voda u apsolutnom iznosu na istom potencijalu, ali potencijalima koji su suprotnog predznaka ($\varphi_a = -\varphi_b$), tada, ukoliko se shema kapacitivnih veza prikazana na slici 4.9a modificira tako da se međusobni kapacitet prikaže kao serijski spoj dvaju kapaciteta od kojih je svaki dvostrukog iznosa međusobnog kapaciteta ($2C_m$), na mjestu njihova spoja na razini modela ostvarena je točka u kojoj je električni potencijal jednak nuli (slika 4.9b [10]). Ovim se postupkom na razini modela nije ništa promijenilo što se tiče kapacitivnih veza, ali se novonastala točka nultog potencijala može na razini modela povezati s tlom koje je također na nultom potencijalu te se dobiva shema prikazana na slici 4.9c [10].

Iz sheme prikazane na slici 4.9c lako je identificirati **paralelni spoj** dozemnog kapaciteta s dvostrukim iznosom međusobnog kapaciteta između svakog od vodiča jednofaznog nadzemnog voda i točke nultog potencijala. Također, lako je prepoznati da su pogonski kapaciteti lijevog i desnog vodiča jednaki te da pogonski kapacitet iznosi [10]:

$$C_p = C_z + 2C_m. \quad (4-65)$$

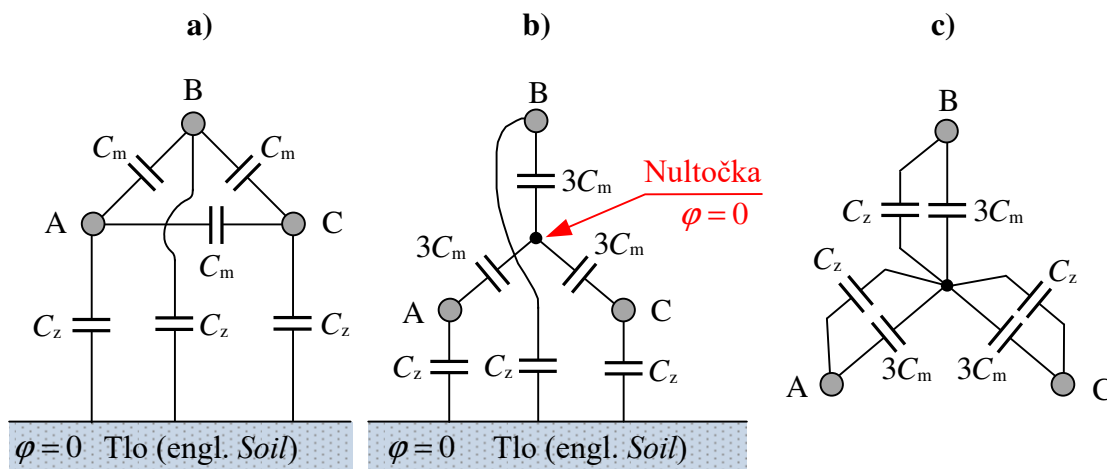


Slika 4.9 Kapacitivne veze obaju vodiča jednofaznog nadzemnog (zračnog) prijenosnog voda s okolinom.

4.7 Pogonski kapacitet trofaznog nadzemnog voda

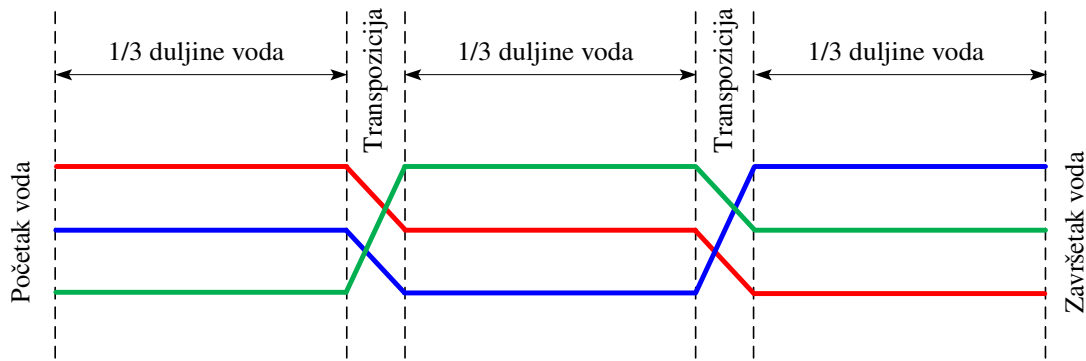
Pogonski kapacitet vodiča trofaznog nadzemnog voda određuje se na analogan način na koji je prikazano određivanje pogonskog kapaciteta vodiča jednofaznog nadzemnog voda. Vodiči trofaznog nadzemnog voda s pripadajućim kapacitivnim vezama prikazani su na slici 4.9a [10]. Primjenom pravila transformacije spoja trokut u zvijezdu nad trokut spojem međusobnih kapaciteta u shemi na slici 4.10a dobiva se shema prikazana na slici 4.10b [10]. Ovim postupkom na razini modela u shemi prikazanoj na slici 4.10b dobivena je točka nultog potencijala (nultočka) na mjestu spoja triju kapaciteta od koji svaki ima iznos trostruke vrijednosti međusobnog kapaciteta ($3C_m$). Ovim se postupkom na razini modela nije ništa promijenilo što se tiče kapacitivnih veza, ali se novonastala točka nultog potencijala može na razini modela povezati s tlom koje je također na nultom potencijalu te se dobiva shema prikazana na slici 4.10c [10]. Iz sheme prikazane na slici 4.10c lako je identificirati **paralelni spoj** dozemnog kapaciteta s trostrukim iznosom međusobnog kapaciteta između svakog od vodiča (svake faze) trofaznog nadzemnog voda i točke nultog potencijala. Također, lako je prepoznati da su pogonski kapaciteti svih vodiča (svake faze) trofaznog voda jednaki te da pogonskog kapacitet trofaznog nadzemnog voda iznosi [10]:

$$C_p = C_z + 3C_m. \quad (4-66)$$



Slika 4.10 Kapacitivne veze vodiča trofaznog nadzemnog (zračnog) prijenosnog voda s okolinom.

Napomena! Obično vodiči pojedinih faza trofaznog nadzemnog voda na dalekovodima nisu na istoj visini iznad zemlje te vodiči imaju različite dozemne kapacitete [10]. Također, međusobne udaljenosti vodiča pojedinih faza nisu jednake te se međusobni kapaciteti razlikuju. Radi navedenog, kako bi se ujednačili parametri svih faza trofaznog nadzemnog voda, provodi se transpozicija položaja faza svake trećine duljine trofaznog prijenosnog voda (slika 4.11 [10]).



Slika 4.11 Transpozicija vodiča u prijenosnomevodu.

Više informacija o nadzemnim vodovima, vrstama nadzemnih vodova, određivanju parametara nadzemnih vodova, modeliranju prijenosnih vodova može se pronaći u [10].

Numerički primjer

Potrebno je odrediti međusobni, dozemni i pogonski kapacitet između vodiča niskonaponskog (230 V, efektivna vrijednost) jednofaznog zračnog voda ako su vodiči aluminijski bez izolacije promjera 10 mm. Vodiči su duljine 1 km, postavljeni na drvenim stupovima na visini od 5 m iznad zemlje i međusobno razmaknuti 40 cm (tipičan je razmak od 30 do 40 cm). Relativna je permitivnost zraka $\epsilon_r = 1$, a permitivnost je vakuumu $\epsilon = \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m.

Rješenje

Prema opisu zadatka, poznato je $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m, $l_v = 1000$ m = $1 \cdot 10^3$ m, $D = 0,4$ m, $\Phi = 0,01$ m $\rightarrow r_v = 0,005$ m, $h = 5$ m.

Međusobni kapacitet jednofaznog dvožičnog zračnog voda određuje se izrazom:

$$C_m = \frac{\epsilon_0 \cdot \pi \cdot l_v}{\ln \frac{D}{r_v}} \quad (\text{F}) \quad (4-67)$$

gdje je ϵ_0 permitivnost vakuumu (F/m), l_v duljina vodiča (m), D razmak između uzdužnih osi vodiča (m), r_v polumjer (radijus) vodiča (m).

Uvrštavanjem zadanih numeričkih vrijednost fizikalnih veličina u izraz (4-67) daje:

$$C_m = \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 3,142 \cdot 10^3}{\ln \frac{0,4}{0,005}} = \frac{2,782 \cdot 10^{-8}}{4,382} = 6,348 \cdot 10^{-9} \text{ F.} \quad (4-68)$$

Kako je $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$, dobivena vrijednost može se napisati i na način:

$$C_m = 6,348 \text{ nF.} \quad (4-69)$$

Međusobni kapacitet po jedinici duljine iznosi:

$$C_{m,1} = \frac{C_m}{l_v} = \frac{6,348 \cdot 10^{-9}}{1000} = 6,348 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 6,348 \text{ pF/m.} \quad (4-70)$$

Međusobni jedinični kapacitet često se izražava i faradima po kilometru duljine kada je:

$$C_{m,1} = \frac{C_m}{l_v} = \frac{6,348 \text{ nF}}{1 \text{ km}} = 6,348 \text{ nF/km.} \quad (4-71)$$

Dozemni kapacitet jednofaznog dvožičnog zračnog voda određuje se izrazom:

$$C_z = \frac{\epsilon_0 \cdot \pi \cdot l_v}{\ln \frac{2h}{r_v}} \text{ (F)} \quad (4-72)$$

gdje je ϵ_0 permitivnost vakuuma (F/m), l_v duljina vodiča (m), h visina vodiča spram zemlje (m), r_v polumjer (radijus) vodiča (m).

Uvrštavanjem zadanih numeričkih vrijednost fizikalnih veličina u izraz (4-72) daje:

$$C_z = \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 3,142 \cdot 10^3}{\ln \frac{2,5}{0,005}} = \frac{2,782 \cdot 10^{-8}}{7,601} = 3,66 \cdot 10^{-9} \text{ F.} \quad (4-73)$$

Kako je $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$, dobivena vrijednost može se napisati i na način:

$$C_z = 3,66 \text{ nF.} \quad (4-74)$$

Dozemni jedinični kapacitet po metru duljine:

$$C_{z,1} = \frac{C_z}{l_v} = \frac{3,66 \cdot 10^{-9} \text{ F}}{1000 \text{ m}} = 3,66 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 3,66 \text{ pF/m.} \quad (4-75)$$

Dozemni jedinični kapacitet često se izražava i faradima po kilometru duljine kada je:

$$C_{z,1} = \frac{C_z}{l_v} = \frac{3,66 \cdot 10^{-9} \text{ F}}{1 \text{ km}} = \frac{3,66 \text{ nF}}{1 \text{ km}} = 3,66 \text{ nF/km.} \quad (4-76)$$

Pogonski kapacitet jednofaznog voda određen je izrazom:

$$C_p = C_z + 2C_m. \quad (4-77)$$

Uvrštavanjem dobivenih brojčanih vrijednosti za međusobni kapacitet ($C_m = 6,348 \text{ nF}$) i dozemni kapacitet ($C_z = 3,66 \text{ nF}$) u prethodni izraz dobiva se iznos pogonskog kapaciteta:

$$C_p = 3,66 \text{ nF} + 2 \cdot 6,348 \text{ nF} = 16,356 \text{ nF.} \quad (4-78)$$

Popis literature

- [1] Zijad Haznadar, Željko Štih, *Elektromagnetizam 2*, Zagreb: Školska knjiga, 1997. ISBN-13: 953-0-31683-6
- [2] Zijad Haznadar, Željko Štih, *Electromagnetic Fields, Waves, and Numerical Methods*, Amsterdam: IOS Press, 2000. ISBN-13: 978-1586030643
- [3] William H. Hayt Jr., John A. Buck, *Engineering Electromagnetics*, 6. izd., New York: McGraw-Hill, 2001. ISBN-13: 978-0071202299
- [4] G. Jagadeeswar Reddy, T. Jayachandra Prasad, *Basics of Electromagnetics and Transmission Lines*, Boca Raton: CRC Press, 2020. ISBN-13: 978-0-367-36330-7
- [5] Edward F. Kuester, *Theory of Waveguides and Transmission Lines*, Boca Raton: CRC Press, 2021. ISBN-13: 978-1-4987-3087-7
- [6] John J. Karakash, *Transmission Lines and Filter Networks*, 1. izd., New York: Macmillan Company, 1950.
- [7] Marija Ožegović, Karlo Ožegović, *Električne energetske mreže I*, Split: Udžbenici Sveučilišta u Splitu, 1996. ISBN: 953-6114-19-4
- [8] Turan Gonen, *Electrical Power Transmission System Engineering: Analysis and Design*, 2. izd., Boca Raton: CRC Press, 2009. ISBN-13: 978-1439802540
- [9] Mohamed E. El-Hawary, *Introduction to Electrical Power Systems*, 1. izd., Hoboken: Wiley-IEEE Press, 2008. ISBN-13: 978-0470408636
- [10] Lajos Jozsa, *Parametri nadzemnih vodova*, Osijek: Grafika Osijek 2006. ISBN-10: 953-6032-54-6

5. UZEMLJIVAČI

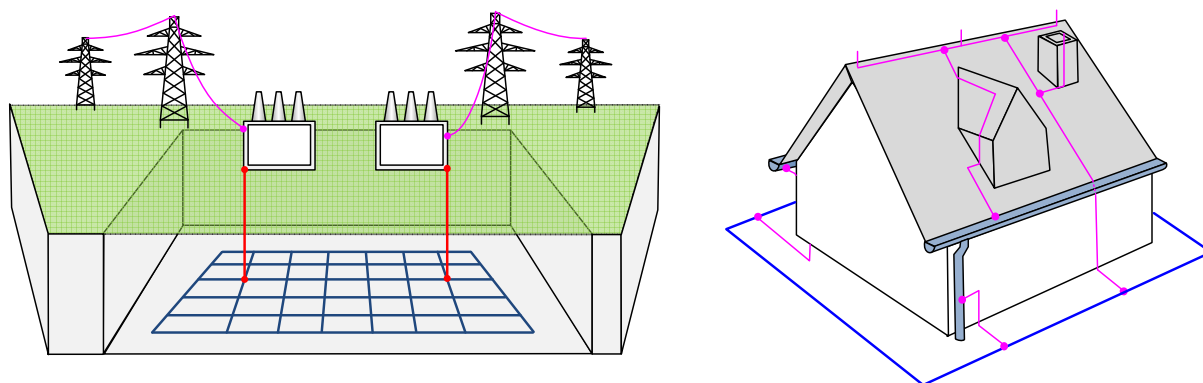
5.1 Osnovni pojmovi i definicije

Uzemljenje, „u užem smislu, vodljivi je spoj neke točke električne mreže, dijela električnog postrojenja ili pojedinih električnih uređaja s tlom (zemljom) preko uzemljivača (vodiča velikih dimenzija); u širem smislu, sustav za odvođenje električne struje u tlo“ [1-6] (slika 5.1. [7, 8]). Uzemljenje se koristi kako bi se osiguralo ispravno funkcioniranje električnih sustava, zaštita električne opreme i uređaja te kako bi se osigurala sigurnost ljudi i životinja od opasnih napona i struja [1-6].

Vrste uzemljenja mogu se podijeliti prema namjeni na [1-6]:

- gromobransko uzemljenje;
- pogonsko (radno) uzemljenje;
- zaštitno uzemljenje;
- kombinirano uzemljenje.

Uzemljivači su uređaji načinjeni od vodiča (sustav vodljivo spojenih vodiča) ukopanih u tlo, a služe za povezivanje električnih uređaja, električnih instalacija ili električnih sustava sa zemljom [1-6]. Prema obliku se dijele na mrežaste, zrakaste (radijalne) i prstenaste, a prema položaju na vertikalne i vodoravne. Vodiči uzemljivača mogu biti štapovi, cijevi, vrpce, užad ili ploče [1-6].



Slika 5.1 Pojednostavljen geometrijski model sustava uzemljenja transformatorske stanice i drugih vodljivih dijelova (lijeva slika) i obiteljske kuće (desna slika).

Opis fenomena

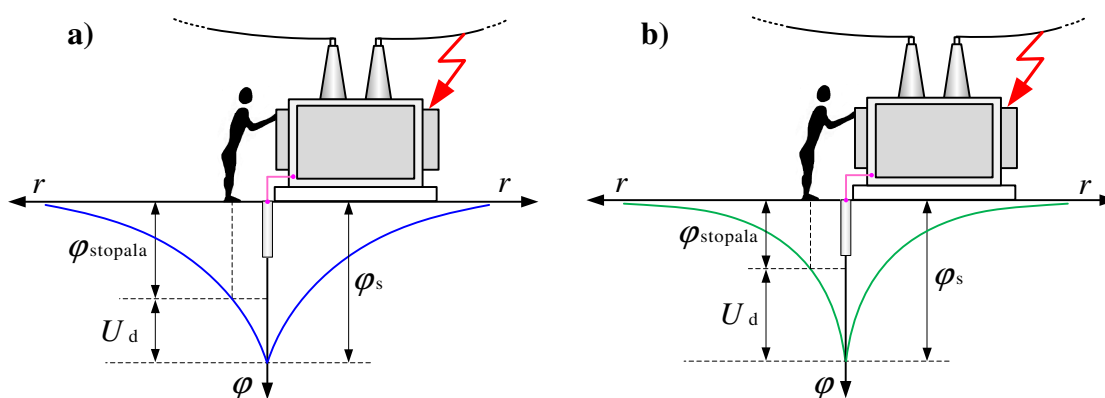
Tijekom trajanja kvara ili udara groma, struja kvara/groma odvodi se u tlo pomoću uzemljivača. Struja koja otječe u tlo uspostavlja određeni potencijal uzemljenih dijelova postrojenja i određenu prostornu raspodjelu skalarnog električnog potencijala na površini tla u okolišu uzemljivača. Raspodjela skalarnog električnog potencijala na površini tla nije konstantna, nego poprima najviše vrijednosti iznad uzemljivača, a udaljavanjem od uzemljivača potencijal opada te u teorijski beskonačno dalekoj točki spušta se na iznos od nula volti. Radi navedenog, postoji gradijent potencijala na površini tla koji za posljedice može imati opasne napone dodira i koraka.

Napon dodira ili dodirni napon (engl. *touch voltages*) definiran je kao električni napon između dvaju dijelova električne opreme s kojima čovjek može istodobno doći u dodir (slika 5.2 [4, 5]):

$$U_d = \varphi_s - \varphi_{\text{stopala}} \quad (5-1)$$

gdje je U_d napon dodira (dodirni napon), φ_s električni potencijal na kojemu se nalazi sustav tijekom kvara, φ_{stopala} električni potencijal na poziciji stopala.

Napon dodira ovisi i o tome koliko je strma krivulja električnog potencijala na površini tla. Pogodnija je manje strma krivulja potencijala. Krivulja potencijala na slici 5.2a pogodnija je u odnosu na krivulju potencijala na slici 5.2b. Prema [5, 9], neopasnim se dodirnim naponom smatra trajni napon do 50 V izmjenične ili do 120 V istosmjerne struje u instalacijama niskoga napona, odnosno do 65 V izmjenične struje u postrojenjima visokoga napona [5, 9].

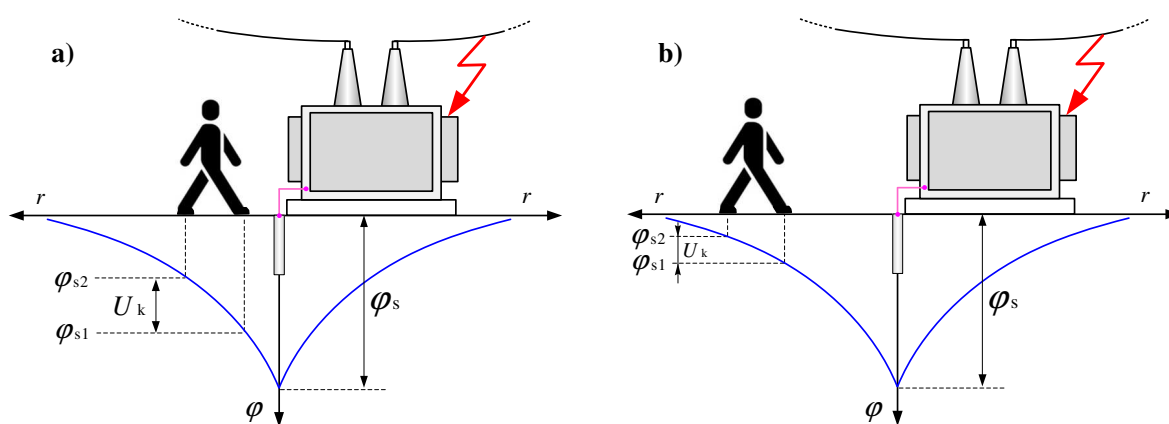


Slika 5.2 Prostorna raspodjela potencijala oko uzemljivača i relevantne fizikalne veličine za određivanje napona dodira. Struja kvara preko metalnog kućišta štitećenog objekta (transformatora) otječe u tlo pomoću uzemljivača. Na slici a) potencijal ima manju strminu, negoli na slici b).

Napon koraka (engl. *Step voltages*) definiran je električni napon između dviju točaka na površini tla. Napon koraka jednak je razlici potencijala između lijeve i desne noge razmaknute jedan metar (slika 5.3. [4, 5]):

$$U_k = \varphi_{s1} - \varphi_{s2} \quad (5-2)$$

gdje je U_k napon koraka, φ_{s1} potencijal na poziciji stopala broj 1, φ_{s2} potencijal na poziciji stopala broj 2. Napon koraka izrazito ovisi o tome koliko je strma krivulja električnog potencijala na površini tla (usporediti sliku 5.3a i sliku 5.3b).



Slika 5.3 Prostorna raspodjela potencijala oko uzemljivača i relevantne fizikalne veličine. Struja kvara preko metalnog kućišta štijećenog objekta (transformatora) otječe u tlo pomoću uzemljivača. Na slici a) napon je koraka veći u odnosu na sliku b) jer se čovjek nalazi u području gdje je veća strmina krivulje električnog potencijala.

Prema [5, 10], dopušteni napon koraka električni je napon koji se smatra neopasnim za ljudski organizam, između dviju točaka međusobno udaljenih jedan metar u smjeru električnog polja koji iznosi do 50 V izmjenične ili do 120 V istosmjerne struje u električnim instalacijama niskoga napona, odnosno do 65 V izmjenične struje u postrojenjima visokog napona [5, 10].

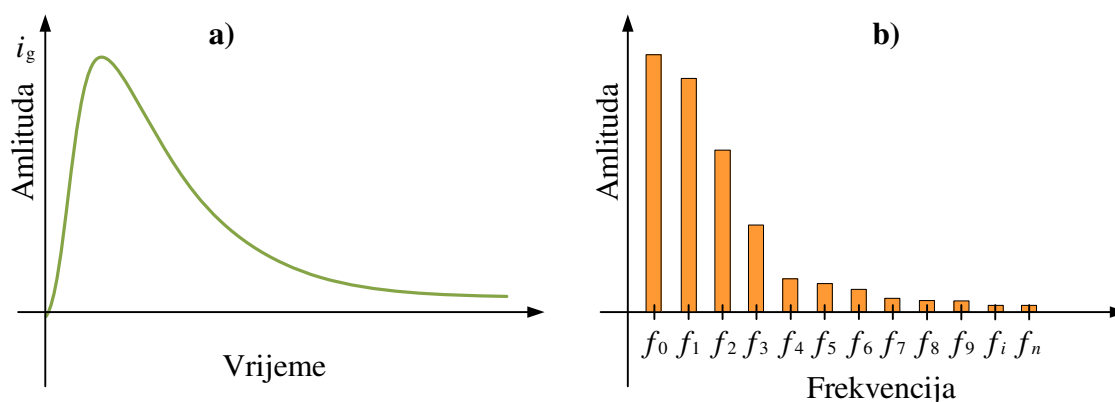
U postrojenjima u kojima zaštita prekida strujni krug u vremenu kraćem od 1 s ili ako radnici nose izolacijske čizme, dopušteni napon koraka može biti veći [5].

5.2 Modeliranje uzemljivača

Pri modeliranju uzemljivača razlikujemo dvije vrste modela - model za niske frekvencije i model za visoke frekvencije.

- **Model za niske frekvencije** koristi opis vladanja uzemljivača pri odvođenju struje mrežne frekvencije (50 Hz) u tlo. Uobičajeno se za niske frekvencije koristi takozvani kvazistatički model. Kvazistatički model zasniva se na opisu polja konstantnim fizikalnim veličinama (0 Hz). S obzirom da je kvazistatički model znatno jednostavniji od frekvencijski ovisnog modela te s obzirom da se na frekvenciji od 50 Hz rezultati dobiveni pomoću obaju modela neznatno razlikuju, razlog je zašto prevladava upotreba kvazistatičkog modela za opis vladanja uzemljivača za mrežne frekvencije struja.

- **Model za visoke frekvencije** koristi opis vladanja uzemljivača pri odvođenju u tlo struje groma. Pri upotrebi ovog modela valni oblik struje groma koja ima oblik strujnog pulsa (slika 5.4a) tipično se predstavlja dvostruko eksponencijalnom funkcijom. Zatim se tako predstavljeni valni oblik struje groma rastavlja na harmonike (slika 5.4b) te se određuje odziv uzemljivača za svaki pojedini harmonički član struje groma. Sintezom odziva uzemljivača svih harmonika struje groma dobiva se rezultanti odziv uzemljivača za određenu struju groma. Uobičajeno se za određivanje harmonika koristi brza Fourierjeva transformacija (engl. *fast Fourier transform* (FFT)). Iako bi teorijski bilo potrebno za egzaktni odziv uvažiti sve harmonike struje groma, s obzirom da njihova amplituda vrlo brzo opada kako se povećava frekvencija harmonika, dobri se rezultati postižu uvažavanjem konačnog broja harmonika. Obično se uzima kriterij da amplituda najvišeg harmoničkog člana bude nekoliko postotaka amplitude osnovnog harmoničkog člana, čime je određen broj potrebnih harmonika koje je potrebno uvažiti.



Slika 5.4 a) Tipičan opis valnog oblika struje groma s dvostruko eksponencijalnom funkcijom i b) amplitudno frekvencijski spektar dvostruko eksponencijalne funkcije.

Primjer modeliranja uzemljivača kvazistatičkim modelom

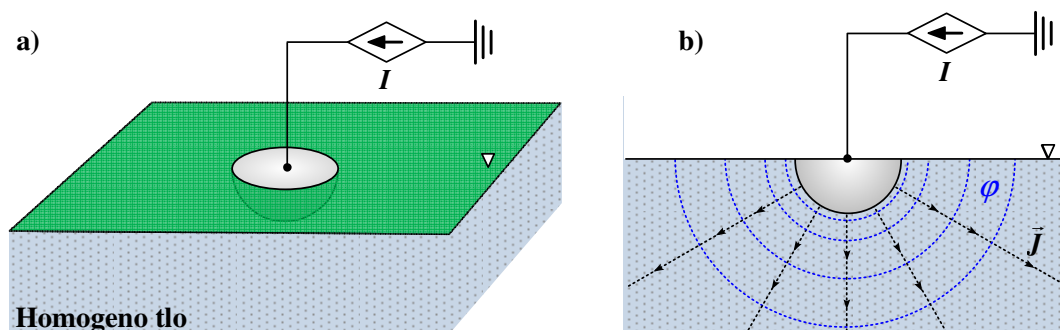
Određivanje potencijala uzemljivača, potencijala na površini tla i **otpora rasprostiranja uzemljivača** (koristi se i naziv otpor uzemljivača) bit će pokazano na najjednostavnijem mogućem primjeru, odnosno na primjeru polukuglastog uzemljivača. *Kugle i polukugle izuzetno se rijetko koriste za uzemljivače, ali kratke štapne elektrode u tlu mogu se predstaviti kuglama ekvivalentnog radijusa, čime se znatno pojednostavljuje matematički račun i teorijska razmatranja.* Zbog relativno jednostavnih matematičkih izraza koji se koriste pri modeliranju kuglastih i polukuglastih uzemljivača u odnosu na druge geometrije uzemljivača, ove dvije vrste uzemljivača često se koriste za uvodne primjere pri upoznavanju čitatelja s načinom modeliranja i fizikalnom slikom koja prati rad uzemljivača [4, 5].

Opis zadatka

U homogeno tlo, specifičnog električnog otpora $\rho=100 \Omega\text{m}$ (tipična vrijednost za Slavoniju) ukopan je uzemljivač oblika polukugle radijusa 10 cm, s bazom koja dodiruje granicu tlo-zrak (slika 5.5 [11]). Potrebno je odrediti otpor rasprostiranja uzemljivača te potencijal iznad uzemljivača i prostornu raspodjelu skalarnog električnog potencijala na površini tla ukoliko je u uzemljivač utisnuta struja od jednog ampera. Također, potrebno je skicirati izgled strujnog polja i ekvipotencijalnih krivulja uspostavljenih u tlu tijekom odvođenja struje kvara u okolno tlo.

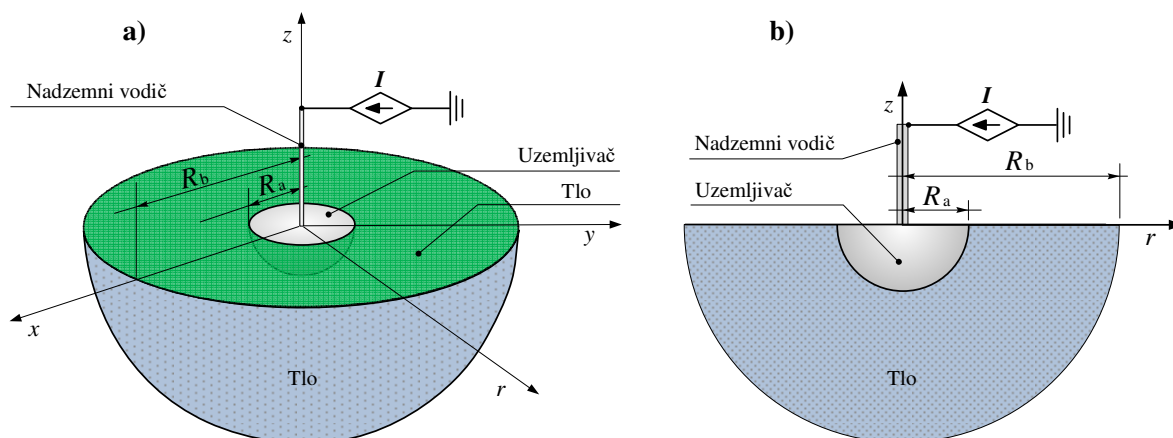
Rješenje

Pojednostavljen 3D prikaz homogenog tla, metalnog polukuglastnog uzemljivača i strujnog izvora kojime je modelirana struja kvara prikazan je na slici 5.5a [11]. Pojednostavljen 2D prikaz homogenog tla, metalnog polukuglastnog uzemljivača i strujnog izvora kojime je modelirana struja kvara prikazan je na slici 5.5b. Skica strujnog polja u tlu \vec{J} i skalarno polje potencijala predstavljeno ekvipotencijalnim krivuljama φ prikazano je na slici 5.5b [11].



Slika 5.5. a) 3D prikaz homogenog tla, uzemljivača i strujne pobude uzemljivača, b) 2D prikaz homogenog tla, uzemljivača, strujne pobude uzemljivača, strujnog polja i skalarnog polja električnog potencijala u tlu predstavljenog ekvipotencijalnim krivuljama.

S obzirom da će ovaj primjer uzemljivača biti modeliran i korištenjem metode konačnih elemenata (MKE) u programskom paketu Ansys Electronics, a poznato je da se metodom konačnih elemenata beskonačna domena (tlo) ne može modelirati kao beskonačna domena, nego se mora predstaviti odgovarajućom konačnom domenom, predstavimo tlo polukuglom radijusa R_b (slika 5.6 [11]). Na ovaj će način biti moguće analizirati utjecaj dimenzija domene na pogrešku u modeliranju primjenom MKE-a. To je moguće jer je utjecaj dimenzija domene na pogrešku u modeliranju primjenom MKE-a ekvivalentan utjecaju udaljenosti rubnog uvjeta referentnog nultog potencijala pri analitičkom modeliranju uzemljivača.



Slika 5.6 Tlo predstavljeno polukuglom radijusa R_b , uzemljivač predstavljen polukuglom radijusa R_a , strujna pobuda uzemljivača i relevantni podaci, a) 3D prikaz, b) 2D prikaz.

S obzirom da jakost struje koja je utisnuta u uzemljivač mora biti jednaka umnošku gustoće struje na površini uzemljivača ukopanoj u tlo i površine ukopanog dijela uzemljivača, što odgovara jakosti struje koja iz uzemljivača istječe u okolno tlo, vrijedi:

$$I = J' \cdot S' \quad (5-3)$$

gdje je S površina ukopanog dijela uzemljivača oblika polukugle (m^2), I jakost utisnute struje (A), J' gustoća struje na površini ukopanog dijela uzemljivača (A/m^2).

Površina ukopanog dijela uzemljivača (oplošja polukugle) glasi:

$$S' = 2R^2 \pi . \quad (5-4)$$

Kombiniranje izraza (5-3) i (5-4) daje:

$$J' = \frac{I}{S'} = \frac{I}{2R^2\pi}. \quad (5-5)$$

S obzirom da je strujno polje simetrično, istim postupkom može se doći do izraza za gustoću struje na proizvoljnoj lokaciji u tlu. Gustoća struje koja prolazi kroz plohu zamišljene polukugle u tlu radijusa r iznosi:

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{2r^2\pi} \quad (5-6)$$

gdje je I jakost utisnute struje (A), S površina polukugle radijusa r sa središtem na istoj poziciji kao i središte uzemljivača.

Analogno, vektorsko polje gustoće struje u tlu određeno je izrazom:

$$\vec{J} = \frac{I}{S} \cdot \vec{a}_r \quad (5-7)$$

gdje je I jakost utisnute struje u uzemljivač (A), S površina zamišljene polukugle (m^2) radijusa r , \vec{a}_r jedinični vektor okomit na plohu S oblika polukugle.

Odnos između gustoće struje i jakosti električnog polja određen je izrazom [12]:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (5-8)$$

gdje je \vec{J} gustoća struje (A/m^2), \vec{E} jakost električnog polja, σ električna vodljivost (S/m).

Veza između električne vodljivosti i električne otpornosti dana je izrazom:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \quad (5-9)$$

Kombiniranje prethodnih izraza daje:

$$\vec{E} = \frac{I\rho}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \vec{a}_r. \quad (5-10)$$

Kod uzemljivača predviđenih za odvođenje struja kvara industrijske frekvencije (50 Hz) električni potencijal, strujna i električna polja mogu se analizirati kao da su statička. Kod statičkih polja, vremenske derivacije u izrazima kojima su opisana polja jednake su nuli ($\partial/\partial t=0$). Kod statičkih polja veza između električnog potencijala i električnog polja dana je izrazom prema kojemu je električno polje negativni gradijent potencijala [12]:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (5-11)$$

Integriranjem prethodnog izraza duž pravca od točke „a“ do točke „b“ dobiva se izraz za razliku potencijala između točaka „a“ i „b“ koje se nalaze na radijalnim udaljenostima R_a i R_b od centra uzemljivača (slika 5.6 [11]):

$$U_{ba} = \varphi_b - \varphi_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (5-12)$$

gdje je $d\vec{s}$ diferencijalni element duljine puta duž krivulje integracije, a određen je izrazom:

$$d\vec{s} = \vec{a}_r \cdot dr. \quad (5-13)$$

Kombiniranje izraza (5-10), (5-12) i (5-13) daje [11]:

$$U_{ba} = - \int_{r=R_a}^{r=R_b} \left(\frac{I\rho}{2\pi} \frac{1}{r^2} \vec{a}_r \right) \cdot \vec{a}_r \cdot dr . \quad (5-14)$$

Kako je $U_{ab} = -U_{ba}$ te $\vec{a}_r \cdot \vec{a}_r = 1$, prethodni izraz može se napisati u obliku [11]:

$$U_{ab} = \left(\frac{I\rho}{2\pi} \right) \cdot \int_{r=R_a}^{r=R_b} \frac{1}{r^2} \cdot dr . \quad (5-15)$$

Nakon provođenja integracije u prethodnom izrazu dobiva se [11]:

$$U_{ab} = \left(\frac{I\rho}{2\pi} \right) \left[-\frac{1}{r} \right]_{r=R_a}^{r=R_b} = \left(\frac{I\rho}{2\pi} \right) \left(-\frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_a} \right) = \left(\frac{I\rho}{2\pi} \right) \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right) . \quad (5-16)$$

Otpor slojeva tla između površine ukopanog dijela polukuglastog uzemljivača i tla konačnih dimenzija oblika polukugle (slika 5.6 [11]), odnosno između točke „a“ i točke „b“ određena je izrazom:

$$R_{ab} = \frac{U_{ab}}{I} . \quad (5-17)$$

Kombiniranje izraza (5-16) i (5-17) daje:

$$R_{ab} = \frac{\rho}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right) . \quad (5-18)$$

Prethodni izraz može se napisati i u obliku:

$$R_{ab} = \frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{R_b - R_a}{R_a R_b}. \quad (5-19)$$

Prethodna dva izraza omogućavaju određivanje otpora rasprostiranja uzemljivača i za slučaj kada je polukuglasti uzemljivač ukopan u tlo beskonačnih dimenzija (R_∞), odnosno kada je tlo modelirano kao poluprostor s granicom tlo-zrak. Uzimanjem graničnog slučaja kada R_b teži beskonačnosti ($R_b \rightarrow \infty$) dobiva se iznos otpora rasprostiranja uzemljivača ukopanog u tlo beskonačnih dimenzija (R_∞):

$$R_\infty = \lim_{R_b \rightarrow \infty} \frac{\rho}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right) = \frac{\rho}{2\pi} \cdot \lim_{R_b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right), \quad (5-20)$$

Kada $R_b \rightarrow \infty$, dobiva se:

$$R_\infty = \frac{\rho}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{1}{R_a}. \quad (5-21)$$

Usporedbom izraza (5-19) s izrazom (5-21) može se uočiti da se prilikom modeliranja tla, koje se po prirodi može smatrati beskonačnim poluprostorom s polukuglom konačnih dimenzija, unosi pogreška u račun. Navedeno će biti neizbježno pri modeliranju tla metodom konačnih elemenata (MKE). Kako bi se analizirala pogreška nastala predstavljanjem beskonačnog prostora (tla) s prostorom konačnih dimenzija (tla) pogodno je uspostaviti vezu između otpora rasprostiranja uzemljivača u tlu kada je tlo konačnih dimenzija i beskonačnih dimenzija na način [11]:

$$R_{ab} = R_\infty \cdot K. \quad (5-22)$$

Kombiniranje (5-19) i (5-21) s izrazom (5-22) daje [11]:

$$K = \frac{R_{ab}}{R_\infty} = \frac{\frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{R_b - R_a}{R_a R_b}}{\frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{1}{R_a}} = \frac{\frac{R_b - R_a}{R_a R_b}}{\frac{1}{R_a}} = \frac{R_b - R_a}{R_b} = 1 - \frac{R_a}{R_b}. \quad (5-23)$$

Postotna pogreška u određivanju otpora rasprostiranja uzemljivača uslijed predstavljanja tla po prirodi beskonačnih dimenzija s tлом konačnih dimenzija određena je izrazom [11]:

$$p\% = \frac{R_{ab} - R_{\infty}}{R_{\infty}} \cdot 100\% = \frac{R_{\infty} \cdot K - R_{\infty}}{R_{\infty}} = (K - 1) \cdot 100\% . \quad (5-24)$$

Koristeći se izrazom (5-24), prethodni izraz može se pojednostaviti na oblik [11]:

$$p\% = -\frac{R_a}{R_b} \cdot 100\% . \quad (5-25)$$

Variranjem omjera R_b/R_a u koracima od 2 pa sve do 50, odnosno omjera R_a/R_b u koracima od 0,5 do 0,02, dobivena je tablica 5.1 [11] u kojoj je prikazana ovisnost pogreške $p\%$ o omjeru R_a/R_b .

Tablica 5.1 Ovisnost pogreške $p\%$ o omjeru R_a/R_b .

Omjer R_b/R_a	2	5	10	20	50
Omjer R_a/R_b	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02
Faktor K	0,5	0,8	0,9	0,95	0,98
Pogreška $p\%$	-50	-20	-10	-5	-2

Prema tablici 5.1 [11], evidentan je trend po kojemu se pogreška u određivanju otpora rasprostiranja uzemljivača monotono smanjuje udaljavanjem referentne točke nultog potencijala od uzemljivača. S obzirom da je položaj referentne točke nultog potencijala izravno vezan s dimenzijama tla, odnosno domene, vrijedi i sljedeći zaključak. Pogreška u određivanju otpora rasprostiranja uzemljivača pri predstavljanju prirodno beskonačne domene s domenom konačnih dimenzija monotono se smanjuje kako se povećava omjer R_b/R_a . Stoga tablica 5.1 daje smjernice o potrebnim dimenzijama domene pri modeliranju uzemljivača korištenjem MKE-a. *Na primjer, ukoliko se MKE koristi za modeliranje uzemljivača, a da pri tome pogreška bude manja od 5 %, potrebno je načiniti model tla kojemu su dimenzije barem 20 puta veće od najveće prostorne dimenzije uzemljivača* [11].

Razdioba skalarnog električnog potencijala na površini tla

Razdioba skalarnog električnog potencijala na površini tla važna je za određivanje potencijala na kojemu se nalazi uzemljivač te napona dodira i napona koraka. Polazeći od izraza (5-11), skalarni električni potencijal na površini tla određen je izrazom [12]:

$$\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (5-26)$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza za električno polje (5-10) te izraza (5-13) za diferencijalni element puta ($d\vec{s} = \vec{a}_r \cdot dr$) u prethodni izraz daje:

$$\varphi = -\int \left(\frac{I\rho}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \vec{a}_r \right) \cdot \vec{a}_r \cdot dr. \quad (5-27)$$

Kako je $\vec{a}_r \cdot \vec{a}_r = 1$, prethodni izraz može se napisati u obliku:

$$\varphi = -\frac{I\rho}{2\pi} \cdot \int \frac{dr}{r^2}. \quad (5-28)$$

Nakon rješavanja neodređenog integrala u prethodnom izrazu, dobiva se:

$$\varphi = \frac{I\rho}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} + C \quad (5-29)$$

gdje je C nepoznata konstanta integracije koja se određuje iz rubnog uvjeta. Dirichletov rubni uvjet koji se odnosi na rub domene, što odgovara točkama na cijeloj plohi oplošja polukugle s kojim je predstavljeno tlo, glasi:

$$\varphi = \varphi(R_b) = 0. \quad (5-30)$$

Uvrštavanje (5-30) u (5-29) daje izraz po kojemu se mijenja skalarni električni potencijal na površini tla kada je domena (tlo) konačnih dimenzija, tj. kada je tlo modelirano kao polukugla radijusa R_b :

$$\varphi_{\text{aproximacija}} = \varphi_{\text{aproximacija}}(r) = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_b} \right). \quad (5-31)$$

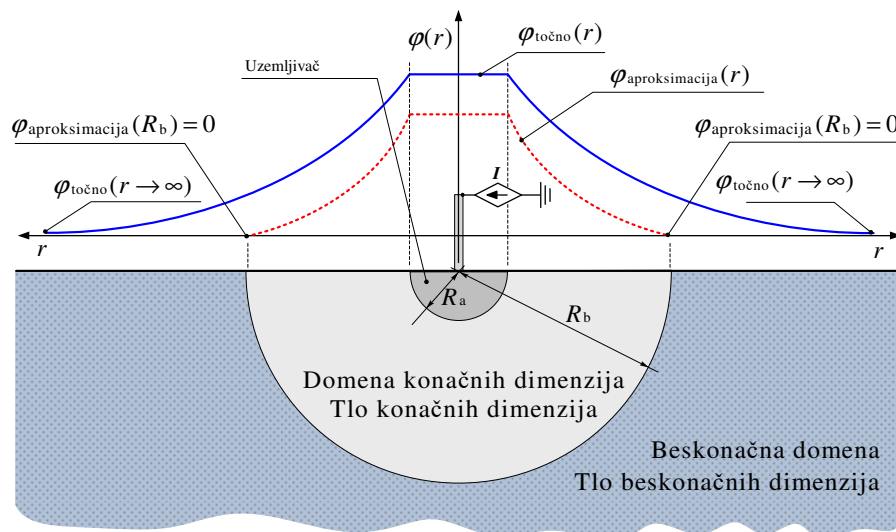
Ukoliko je tlo beskonačno, tada Dirichletov rubni uvjet glasi:

$$\varphi(r \rightarrow \infty) = 0. \quad (5-32)$$

Uvrštavanje (5-32) u (5-29) daje $C = 0$ te je izraz po kojemu se mijenja skalarni električni potencijal na površini tla kada je domena (tlo) beskonačnih dimenzija, tj. kada je tlo modelirano kao beskonačni poluprostor s granicom tlo-zrak:

$$\varphi_{\text{točno}} = \varphi_{\text{točno}}(r) = \frac{I\rho}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}. \quad (5-33)$$

Razdioba skalarnog električnog potencijala na površini tla prema izrazima (5-31) i (5-33) prikazana je na slici 5.7 [11].



Slika 5.7 Razdioba skalarnog električnog potencijala na površini tla za slučajeve kada je tlo konačnih dimenzija (oblika polukugle) i beskonačnih dimenzija (poluprostor).

Otpor rasprostiranja uzemljivača

Otpor rasprostiranja uzemljivača određen je omjerom napona uzemljivača u odnosu na beskonačno udaljenu referentnu točku koja se nalazi na nultom potencijalu i struje koja se rasprostire u okolno tlo iz uzemljivača (odatle i potječe ime ovog otpora):

$$R_u = \frac{U_{\text{uzemljivača}}}{I} = \frac{\varphi_{\text{uzemljivača}} - \varphi_{\text{ref}}}{I} \quad (5-34)$$

gdje je $U_{\text{uzemljivača}}$ napon uzemljivača spram beskonačno daleke referentne točke na nulom potencijalu (V), $\varphi_{\text{uzemljivača}}$ potencijal uzemljivača (V), φ_{ref} potencijal beskonačno daleke referentne točke nultog potencijala (V), I struja koja se iz uzemljivača rasprostire u okolno tlo (A).

Za $r = R_a$ uvršteno u izraz (5-33) dobiva se iznos potencijala uzemljivača:

$$\varphi_{\text{uzemljivača}} = \frac{I\rho}{2\pi} \cdot \frac{1}{R_a}. \quad (5-35)$$

Nakon dijeljenja prethodnog izraza sa strujom I dobiva se izraz za otpor rasprostiranja uzemljivača:

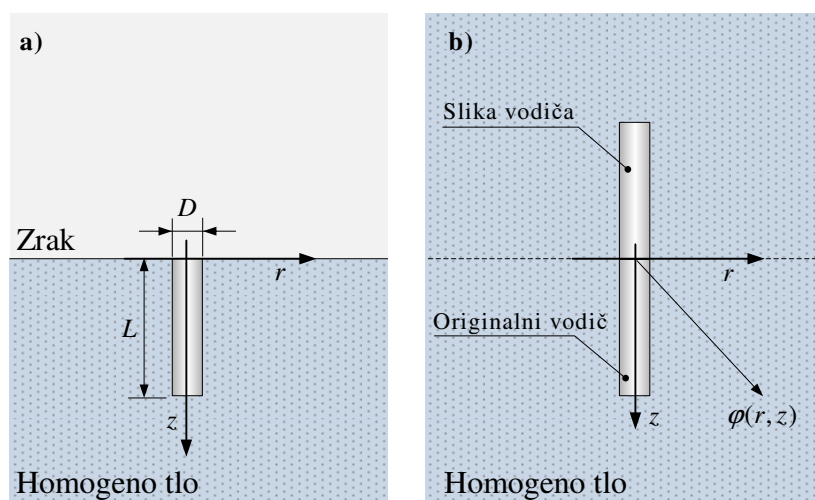
$$R_u = \frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{1}{R_a}. \quad (5-36)$$

Uvrštavanjem zadanih brojčanih vrijednosti u prethodni izraz dobiva se:

$$R_u = \frac{100}{2\pi} \cdot \frac{1}{0,1} = 159,23 \Omega. \quad (5-37)$$

Vertikalni štapni (cjevasti) uzemljivač

Vertikalni štapni (cjevasti) uzemljivači (slika 5.8a) vrsta su uzemljivača koja se često koristi. Skalarni električni potencijal u tlu i na površini tla (granica tlo-zrak), uslijed struje koja istječe iz vertikalnog štapnog (cjevastog) uzemljivača, može se odrediti korištenjem metode odslikavanja, poznate i kao metoda slika (engl. *Method of images*). Prema metodi odslikavanja strujno polje i polje električnog potencijala u tlu ($z \geq 0, r \geq D/2$), u kojemu je ukopan uzemljivač i iz kojega istječe struja u okolno tlo, mogu se odrediti na način da se zamisli da je medij koji okružuje uzemljivač (tlo) proširen izvan granice tlo-zrak u područje gdje je bio zrak, a zrcalno od granice tlo-zrak postoji virtualni uzemljivač, odnosno slika uzemljivača iz kojeg također istječe struja jednakog iznosa kao i izvornog vodiča uzemljivača (slika 5.8b). Metodom odslikavanja dobiva se zamišljeni uzemljivač koji ima dvostruku duljinu izvornog uzemljivača, a koji je u istom mediju kao i izvorni uzemljivač (slika 5.8b).



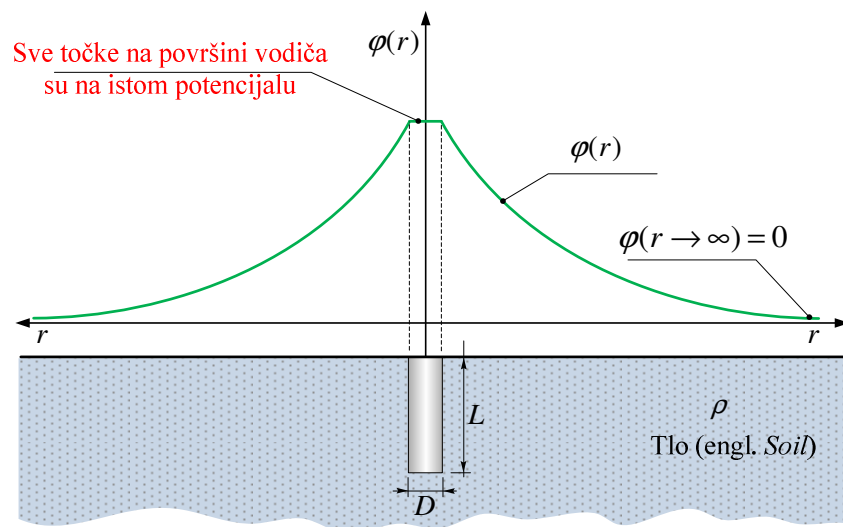
Slika 5.8 a) Štapni (cilindrični) uzemljivač ukopan u tlo i b) model za određivanje električnog potencijala u tlu primjenom metode odslikavanja.

Izraz za skalarni električni potencijal u području izvornog medija (tla), tj. za $z \geq 0, r \geq D/2$ glasi [5, 11, 12]:

$$\varphi(z, r) = \frac{I\rho}{4\pi L} \ln \frac{z+L+\sqrt{(z+L)^2+r^2}}{z-L+\sqrt{(z-L)^2+r^2}} \quad (5-38)$$

gdje je ρ otpornost tla ($\Omega \cdot \text{m}$), I struja koja istječe iz uzemljivača u okolno tlo (A), L duljina cjevastog uzemljivača (m).

Korištenjem izraza (5-38) može se odrediti i skicirati izgled skalarnog električnog potencijala na površini tla uslijed istjecanja struje iz uzemljivača na način kako je to prikazano na slici 5.9 [11].



Slika 5.9 Skalarni električni potencijal na površini tla uslijed istjecanja struje iz vertikalnog štapnog uzemljivača u okolno tlo

Zbog jednostavne geometrije za ovu vrstu uzemljivača postoje točni analitički izrazi za skalarni električni potencijal na površini tla i za otpor rasprostiranja uzemljivača. Jedan takav izraz dan je i u međunarodnim normama „IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding, IEEE Std 80-2000“ [2,] i „IEEE Recommended Practice for Grounding of Industrial and Commercial Power Systems“ [3] i glasi:

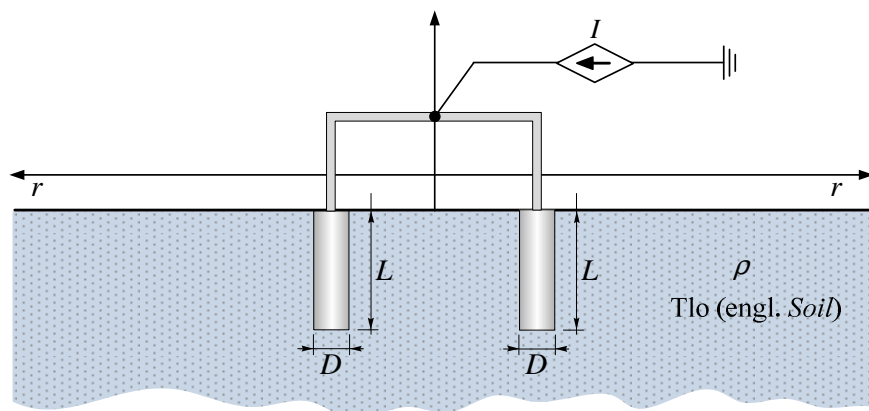
$$R_u = \frac{\rho}{2\pi L} \left(\ln \frac{8L}{D} - 1 \right). \quad (5-39)$$

Na primjer, za brojčane vrijednosti $\rho = 100 \Omega\text{m}$, $L = 2 \text{ m}$, $D = 5 \text{ cm}$, prema prethodnom izrazu, dobiva se:

$$R_u = \frac{100}{2 \cdot \pi \cdot 2} \cdot \left(\ln \frac{8 \cdot 2}{0,05} - 1 \right) = 7,962 \cdot (\ln 320 - 1) = 7,962 \cdot (5,768 - 1) = 37,96 \Omega. \quad (5-40)$$

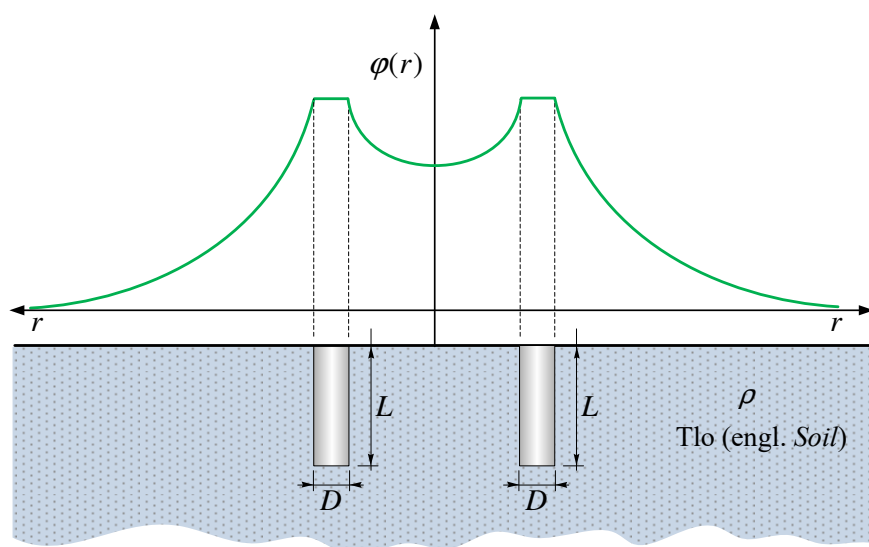
Paralelno spojeni vertikalni štapni uzemljivači

Ukoliko je to potrebno, vertikalni štapni (cilindrični) mogu se spajati paralelno (slika 5.10). Tom se tehnikom smanjuje iznos ekvivalentnog otpora rasprostiranja te se i oblikuje raspodjela potencijala na površini tla (slika 5.11). Potencijal na površini tla između uzemljivača ima manju strminu te se postižu povoljniji iznosi napona koraka u odnosu na slučaj kada bi bio samo jedan uzemljivač (usporediti slike 5.9. i sliku 5.11).



Slika 5.10 Dva vertikalna cilindrična uzemljivača spojena paralelno i relevantne veličine

Ekvivalentni otpor rasprostiranja dvaju paralelno spojenih vertikalnih cilindričnih uzemljivača nije dvostruko manji jer uzemljivači utječu jedan na drugoga na način da struja koja istječe i svakoga od njih podiže električni potencijal na mjestu drugog uzemljivača. Ako su vodiči uzemljivača dovoljno razmaknuti, tada je ekvivalentni otpor rasprostiranja dvaju paralelno spojenih vertikalnih cilindričnih uzemljivača približno dvostruko manji od pojedinačnog otpora rasprostiranja.



Slika 5.11 Skalarni električni potencijal na površini tla uslijed istjecanja struje iz dvaju vertikalnih cilindričnih uzemljivača spojenih paralelno.

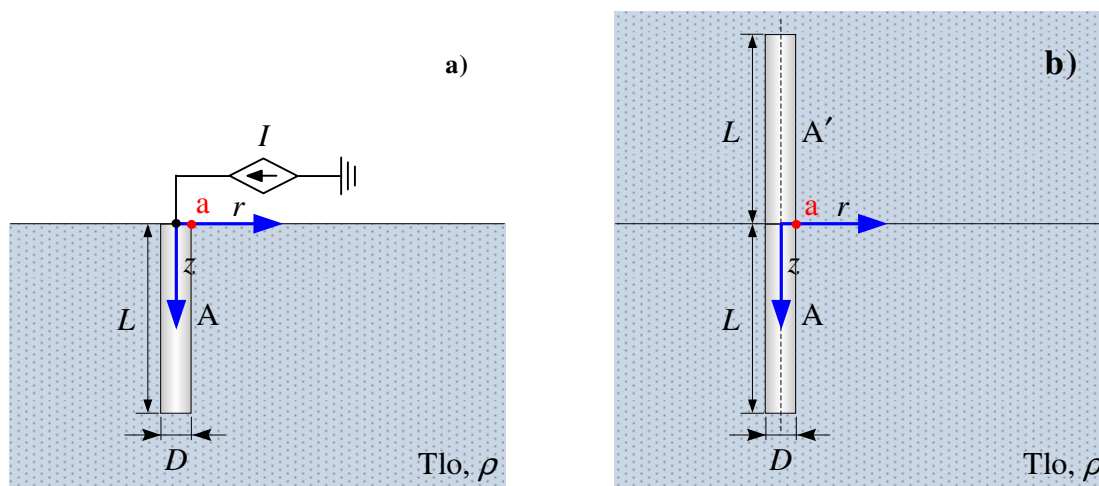
Otpor rasprostiranja dvaju paralelno spojenih vertikalnih cijevi

Koristeći se metodom odslikavanja potrebno je prvo odrediti otpor rasprostiranja uzemljivača koji se sastoji od jedne vertikalno ukopane cilindrične cijevi, a zatim otpor rasprostiranja uzemljivača koji se sastoji od dvije paralelne vertikalno ukopane identične cilindrične cijevi koje su iznad zemlje galvanski povezane, a kojima su uzdužne osi na razmaku koji je jednak dvostrukoj duljini cijevi. Tlo je u obama slučajevima homogeno i izotropno tlo otpornosti $\rho = 100 \Omega\text{m}$. Duljine cijevi su $L = 2 \text{ m}$, a promjer $D = 5 \text{ cm}$. Usporedite vrijednost dobivenog otpora rasprostiranja uzemljivača koji se sastoji od jedne vertikalno ukopane cilindrične cijevi s otporom rasprostiranja uzemljivača koji se sastoji od dviju identičnih vertikalno ukopanih cilindrične cijevi.

Rješenje

Prema opisu zadatka, koristeći se metodom odslikavanja, prvo je potrebno odrediti otpor rasprostiranja uzemljivača koji se sastoji od vertikalno ukopanog cilindričnog vodiča (slika 5.12a).

Prema metodi odslikavanja, strujno polje i polje električnog potencijala u tlu ($z \geq 0, r \geq D/2$), u kojemu je ukopan uzemljivač i iz kojega istječe struja u okolno tlo, mogu se odrediti na način da se zamisli da je medij koji okružuje uzemljivač (tlo) proširen izvan granice tlo-zrak u područje gdje je bio zrak, a zrcalno od granice tlo-zrak postoji virtualni uzemljivač, odnosno slika uzemljivača iz kojeg također istječe struja jednakog iznosa kao i izvornog vodiča uzemljivača (slika 5.12b). Metodom odslikavanja dobiva se zamišljeni uzemljivač koji ima dvostruku duljinu izvornog uzemljivača, a koji je u istom mediju kao i izvorni uzemljivač (slika 5.12b). Primjenom metode odslikavanja izvorni vodič uzemljivača (oznaka A) odslikava se od granice tlo-zrak te nastaje njegova zrcalna slika (oznaka A') (slika 5.12b).



Slika 5.12 Uzemljivač načinjen od ukopane vertikalne cilindrične cijevi (oznaka A) u homogeno tlo i b) izvorni uzemljivač (oznaka A) te njegova zrcalna slika (oznaka A').

Za osamljeni cjevasti vodič koji se nalazi u homogenom prostoru otpornosti ρ iz kojega se u okolni prostor rasprostire struja I postoji analitički izraz po kojemu se može odrediti skalarni električni potencijal u njegovoj okolini. Izraz za skalarni električni potencijal u području izvornog medija (tla), tj. za $z \geq 0$, $r \geq D/2$ (slika 5.12b) glasi [4, 5, 11, 12]:

$$\varphi(z, r) = \frac{I\rho}{8\pi L} \ln \frac{z+L+\sqrt{(z+L)^2+r^2}}{z-L+\sqrt{(z-L)^2+r^2}} \quad (5-41)$$

gdje je ρ otpornost medija (tla) ($\Omega\cdot\text{m}$), L duljina izvornog cjevastog vodiča (m), I ukupna struja koja istječe iz izvornog vodiča i njegove slike (A).

Skalarni električni potencijal točke „a“ ($z = 0$, $r = D/2$), zbog struje I koje istječu iz vodiča A i struje $I' = I$ koja istječe iz njegove slike A', glasi:

$$\varphi_a = \frac{(2I)\rho}{8\pi L} \ln \frac{L+\sqrt{L^2+(D/2)^2}}{-L+\sqrt{L^2+(D/2)^2}}. \quad (5-42)$$

Manjim sređivanjem prethodnog izraza dobiva se:

$$\varphi_a = \frac{I\rho}{4\pi L} \ln \frac{L+\sqrt{L^2+(D/2)^2}}{-L+\sqrt{L^2+(D/2)^2}}. \quad (5-43)$$

Kako je potencijal točke „a“ ujedno i potencijal na kojemu se nalazi uzemljivač vrijedi:

$$\varphi_{\text{uzemljivača}} = \varphi_a. \quad (5-44)$$

Otpor rasprostiranja uzemljivača određen je izrazom

$$R_u = \frac{\varphi_{\text{uzemljivača}}}{I}. \quad (5-45)$$

Kombiniranjem prethodnih triju izraza dobiva se izraz za otpor rasprostiranja cjevastog vertikalno ukopanog uzemljivača u homogenom tlu:

$$R_u = \frac{\rho}{4\pi L} \ln \frac{L+\sqrt{L^2+(D/2)^2}}{-L+\sqrt{L^2+(D/2)^2}}. \quad (5-46)$$

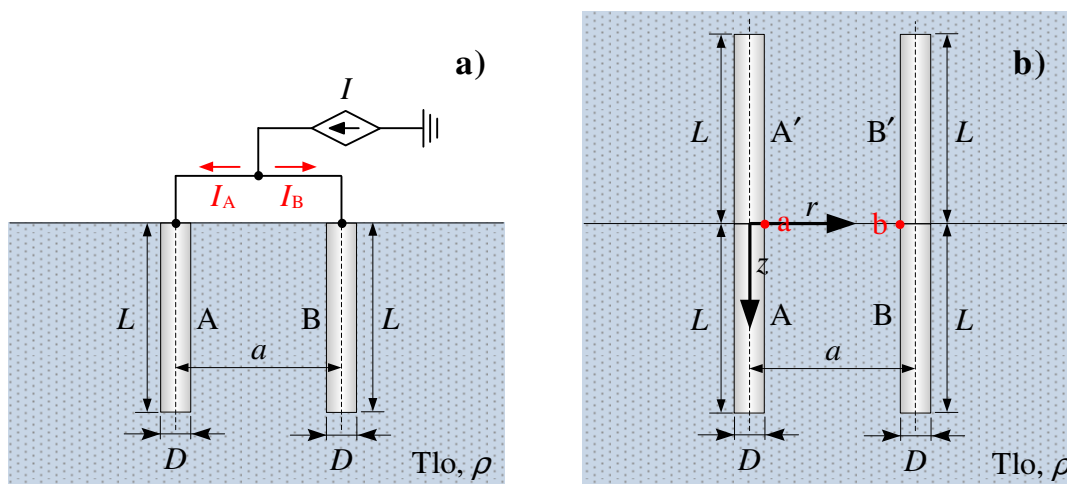
Uvrštavanjem zadanih brojeanih vrijednosti fizikalnih veličina u prethodni izraz daje:

$$R_u = \frac{100}{4\pi 2} \cdot \ln \frac{2 + \sqrt{2^2 + (2,5 \cdot 10^{-2})^2}}{-2 + \sqrt{2^2 + (2,5 \cdot 10^{-2})^2}} = 3,979 \cdot \ln \frac{2 + 2,0002}{-2 + 2,0002}, \quad (5-47)$$

$$R_u = 3,979 \cdot \ln \frac{4,0002}{0,0002} = 3,979 \cdot 9,904 = 39,408 \, \Omega. \quad (5-48)$$

Dobivena vrijednost otpora rasprostiranja od $39,41 \, \Omega$ je veća, ujedno i manje točna vrijednost od vrijednosti otpora rasprostiranja $37,96 \, \Omega$ koja se dobiva prema točnijem izrazu (5-39) preporučenom u međunarodnoj normi [2, 3].

U nastavku zadatka potrebno je odrediti otpor rasprostiranja uzemljivača koji se sastoji od dviju vertikalno ukopanih cijevi u homogeno tlo koje su iznad tla galvaniski povezane (slika 5.13a).



Slika 5.13 a) Uzemljivač načinjen od dviju identičnih ukopanih vertikalnih cilindričnih cijevi (oznake A i B) u homogeno tlo i b) izvorne cijevi uzemljivača (oznake A i B) te njihove zrcalne slike (oznake A' i B').

Ova je elektromagnetska zadaća izrazito simetrična, što se može iskoristiti za pojednostavljene postupka računanja. Zbog simetrije vrijedi $I_A = I_B = I/2$. Također, potencijal točke „a“ jednak je potencijalu točke „b“, tj. vrijedi: $\varphi_a = \varphi_b$. Taj je potencijal ujedno i potencijal na kojemu se nalaze svi metalni dijelovi uzemljivača te vrijedi $\varphi_{uzemljivača} = \varphi_a = \varphi_b$. Uzimajući da je potencijal beskonačno daleke referentne točke na nultom potencijalu, otpor rasprostiranja uzemljivača određuje se izrazom:

$$R_u = \frac{\varphi_{uzemljivača}}{I}. \quad (5-49)$$

Kako je $\varphi_{\text{uzemljivača}} = \varphi_a = \varphi_b$, za određivanje otpora rasprostiranja potrebno je odrediti potencijal točke „a“ radi struja koje istječu u okolno tlo iz izvornih vodiča A i B, i njegovih slika A' i B'. Iz slika vodiča A' i B' istječu jednake struje kao i iz izvornih vodiča A i B.

Vodič A zajedno sa svojom slikom A' može se smatrati jednim vodičem duljine $2L$ iz kojega istječe dvostruka struja ($2I_A = I$). Jednako tako, vodič B zajedno sa svojom slikom B' može se smatrati jednim cjevastim vodičem duljine $2L$ iz kojega istječe dvostruka struja ($2I_B = I$).

Potencijal točke „a“ može se odrediti zbrajanjem potencijala $\varphi_{a(A-A')}$ kojega uzrokuje struja koja istječe iz zamišljenog vodiča kojega čine vodič A i njegova slika A' te potencijala $\varphi_{a(B-B')}$ kojega uzrokuje struja koja istječe iz zamišljenog vodiča kojega čine vodič B i njegova slika B' :

$$\varphi_a = \varphi_{a(A-A')} + \varphi_{a(B-B')} . \quad (5-50)$$

Skalarni električni potencijal točke „a“ ($z=0$, $r=D/2$), zbog struja koje istječu iz zamišljenog vodiča kojega čine vodič A i njegova slika A', glasi (slika 5.13b):

$$\varphi_{a(A-A')} = \frac{I\rho}{8\pi L} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + (D/2)^2}}{-L + \sqrt{L^2 + (D/2)^2}} . \quad (5-51)$$

Skalarni električni potencijal točke „a“ ($z=0$, $r=a-D/2 \approx a$), zbog struja koje istječu iz zamišljenog vodiča kojega čine vodič B i njegova slika B', glasi (slika 5.12b):

$$\varphi_{a(B-B')} = \frac{I\rho}{8\pi L} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + a^2}}{-L + \sqrt{L^2 + a^2}} . \quad (5-52)$$

Kako je, prema opisu zadatka $a = 2L$, prethodni izraz poprima oblik

$$\varphi_{a(B-B')} = \frac{I\rho}{8\pi L} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + (2L)^2}}{-L + \sqrt{L^2 + (2L)^2}} . \quad (5-53)$$

Uvrštavanjem (5-51) i (5-53) u (5-50) daje

$$\varphi_a = \frac{I\rho}{8\pi L} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + (D/2)^2}}{-L + \sqrt{L^2 + (D/2)^2}} + \frac{I\rho}{8\pi L} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + (2L)^2}}{-L + \sqrt{L^2 + (2L)^2}} . \quad (5-54)$$

Kako je $\varphi_{\text{uzemljivača}} = \varphi_a$, otpor rasprostiranja uzemljivača određen je izrazom:

$$R_u = \frac{\varphi_{\text{uzemljivača}}}{I} = \frac{\varphi_a}{I} . \quad (5-55)$$

Kombiniranjem izraza (5-54) i (5-55) dobiva se:

$$R_u = \frac{\rho}{8\pi L} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + (D/2)^2}}{-L + \sqrt{L^2 + (D/2)^2}} + \frac{\rho}{8\pi L} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + (2L)^2}}{-L + \sqrt{L^2 + (2L)^2}}. \quad (5-56)$$

Uvrštavanjem poznatih broječnih vrijednosti fizikalnih veličina u prethodni izraz daje:

$$R_u = \frac{100}{8\pi 2} \ln \frac{2 + \sqrt{2^2 + (2,5 \cdot 10^{-2})^2}}{-2 + \sqrt{2^2 + (2,5 \cdot 10^{-2})^2}} + \frac{100}{8\pi 2} \ln \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4^2}}{-2 + \sqrt{2^2 + 4^2}}. \quad (5-57)$$

Rješavanje prethodnog izraza prikazano je u nekoliko koraka:

$$R_u = 1,989 \cdot \ln \frac{2 + 2,0002}{-2 + 2,0002} + 1,989 \cdot \ln \frac{2 + 4,472}{-2 + 4,472}, \quad (5-58)$$

$$R_u = 1,989 \cdot \ln \frac{4,0002}{0,0002} + 1,989 \cdot \ln \frac{6,472}{2,472}, \quad (5-59)$$

$$R_u = 1,989 \cdot 9,904 + 1,989 \cdot 0,962 = 1,989 \cdot (9,904 + 0,962) = 21,612 \Omega. \quad (5-60)$$

Dobivena broječna vrijednost otpora rasprostiranja $R_u = 21,612 \Omega$ nalazi se u rasponu očekivanih vrijednosti otpora rasprostiranja $19,705 < R_u < 39,41$.

Zbog relativne geometrijske blizine obaju cijevi, istjecanje struja iz svake od njih podiže električni potencijal na mjestu druge cijevi, stoga ekvivalentni otpor rasprostiranja dviju paralelno spojenih identičnih cijevi nije dvostruko manji od otpora rasprostiranja jedne cijevi ($19,705 \Omega$), nego je veći od te vrijednosti, ali ipak manji od otpora rasprostiranja jedne cijevi ($39,41 \Omega$).

Kada bi cijevi bile jako razmaknute, tako da vrijedi $a \gg L$, tada bi iznos otpora rasprostiranja bio jednak polovini vrijednosti uzemljivača koji se sastoji od jedne ukopane cijevi, tj. $R_u = 19,705 \Omega$.

Popis literature

- [1] „Uzemljenje“, *Tehnički leksikon* (mrežno izdanje), Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2025. dostupno na: <https://tehnicki.lzmk.hr/clanak/uzemljenje>, (pristupljeno 22.6.2025.)
- [2] IEEE, *IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding*, IEEE Std 80-2000 (Revision of IEEE Std 80-1986). *The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.* New York: The Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2000. ISBN 0-7381-1926-1
- [3] IEEE, *IEEE Recommended Practice for Grounding of Industrial and Commercial Power Systems*, New York: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2007. ISBN-10: 0-7381-5639-2
- [4] Franjo Majdandžić, *Uzemljivači i sustavi uzemljenja*, Zagreb: Graphis, 2004. ISBN-10: 953-96399-6-4
- [5] Hrvoje Požar, *Visokonaponska rasklopna postrojenja*, Zagreb: Tehnička knjiga, 1990. ISBN: 86-7059105-7
- [6] Vijayaraghavan, G., Brown, M., Barnes, M., *Practical Grounding, Bonding, Shielding and Surge Protection*, 1. izd., Oxford: Butterworth-Heinemann, 2004. ISBN-13: 978-0-7506-6399-1
- [7] Srete Nikolovski, Tomislav Barić „Computer Aided Design of Transformer Station Grounding System Using CDEGS Software“, *Acta Polytechnica*, vol. 44, br. 2, 2004. doi: 10.14311/552.
- [8] Vjekoslav Srb, *Električne instalacije i niskonaponske mreže*, Zagreb: Tehnička knjiga, 1991. ISBN: 86-7059-108-1
- [9] „Dodirni napon“, *Hrvatska enciklopedija* (mrežno izdanje), Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013.-2026. dostupno na: <https://www.enciklopedija.hr/clanak/dodirni-apon>, (pristupljeno 15.1.2026.)
- [10] „Napon koraka“, *Hrvatska enciklopedija* (mrežno izdanje), Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013.-2026. dostupno na: <https://www.enciklopedija.hr/clanak/napon-koraka>, (pristupljeno 15.1.2026.)
- [11] Tomislav Barić, Hrvoje Glavaš, Željko Hederić, Mirko Karakašić, „Modelling Grounding Systems Using the Finite Element Method: The Influence of the Computational Domain Size on the Accuracy of the Numerical Calculation“ *Tehnički vjesnik*, vol. 30, br. 6, 2023, str. 1717-1727, doi: 10.17559/TV-20220727092344
- [12] Branko Popović, *Zbornik problema iz elektromagnetike*, 3. izd., Beograd: Građevinska knjiga, 1972.

6. GALVANSKE METODE MJERENJA OTPORNOSTI TLA

6.1 Električna otpornost tla

Otpor rasprostiranja uzemljivača izravno je proporcionalan s električnom otpornosti tla (engl. *Electric resistivity of soil*). Zbog toga, pri dizajniranju uzemljivača i sustava uzemljenja potrebno je poznavati otpornost tla na području na kojemu će biti ukopan uzemljivač. Električna otpornost tla označava se malim grčkim slovom ρ (ρ), a mjerna je jedinica ommetar ($\Omega \cdot m$) [1, 2].

U užem smislu riječi, pod tlom se podrazumijeva površinski sloj Zemljine kore kojim je pokriven najveći dio kopna na Zemlji. Električna otpornost tla ovisi o vrsti tla (prah, glina, organsko tlo, šljunak, pijesak i njihove mješavine), građi, vlažnosti i temperaturi. Zbog varijacije vlažnosti i temperature vrijednost električne otpornosti tla mijenjaju se tijekom godišnjih doba. Najveću električnu otpornost imaju stjenovita, sedimentna i šljunčana tla, a najmanju močvarna i ilovačasta tla [3, 4]. Zbog prisutnosti korijenja biljaka, poroznosti površinskog sloja tla te zaleđivanja površinskog sloja tla zimi i isušivanja površinskog sloja tla ljeti, površinski sloj tla ima znatno veću električnu otpornost od dubljih slojeva tla. Za bolju predodžbu koliko je veća otpornost tla u odnosu na dobre vodiče, kao što je bakar te slana voda, u tablici 6.1. [3, 4] dani su podaci o električnoj otpornosti raznih vrsta materijala među kojima su i razne vrste tla.

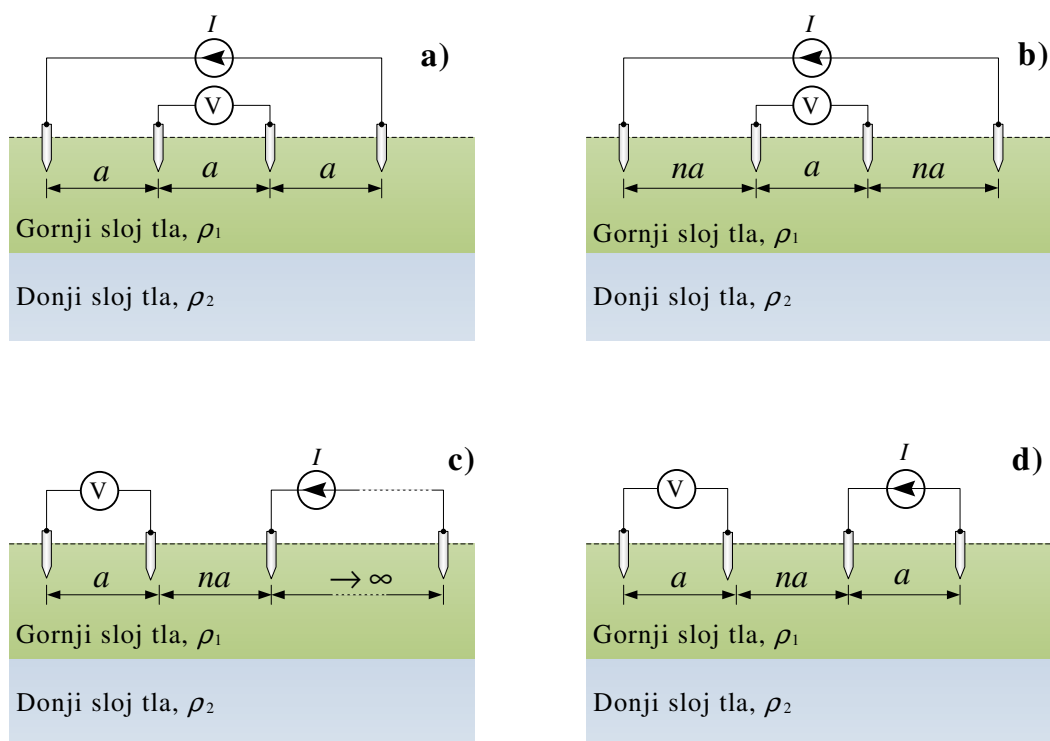
Tablica 6.1. Električna otpornost odabranih materijala pri izmjeničnoj struji industrijske frekvencije i temperaturi od 20 °C [3, 4].

Materijal	$\rho(\Omega \cdot m)$	Materijal	$\rho(\Omega \cdot m)$
Bakar	$1,68 \times 10^{-8}$	Močvarno tlo	od 5 do 40
Morska voda	od 0,20 do 0,30	Ilovača, glina, crnica	od 20 do 2000
Bazenska voda	od 0,333 do 0,40	Pijesak	od 200 do 2500
Pitka voda	od 20 do 2 000	Kamen, šljunak	od 2000 do 3000

6.2 Galvanske metode mjerenja električne otpornosti tla

Galvanske metode mjerenja električne otpornosti tla temelje se na izravnom kontaktu metalnih elektroda i tla, odnosno na izravnom propuštanju struje kroz tlo [5-7]. Ime ovih metoda potječe od naziva za sve oblike protjecanja struje kroz vodljive elektrode koje su u izravnom kontaktu s električno vodljivim medijem, a koje se nazivaju galvanskim provođenjem struje. Mjerenje se provodi na način da se između dviju metalnih elektroda zabijenih u tlo propusti struja poznatog iznosa te se zatim mjeri napon između drugih dviju metalnih elektroda također zabijenih u tlo [5-7]. Izmjereni napon ovisi o jakosti struje i otpornosti tla [5-7].

Galvanskim metodama (tehnikama) mjerenja električne otpornosti tla moguće je i odrediti strukturu i sastav tla [8-12]. Za vrlo jednostavne strukture tla potrebno je načiniti teorijski model kojim je opisana ovisnost mjernih rezultata (prividne otpornosti tla) o otpornosti i debljini pojedinih slojeva tla (npr. za dvoslojno ili troslojno tlo). Nakon provedenih mjerenja i usporedbi mjernih rezultata s teorijskim modelom moguće je odrediti električnu otpornost i debljinu pojedinih slojeva tla. Pri određivanju složenije strukture i sastava tla za interpretaciju mjernih rezultata koriste se računalne simulacije. Glavna su područja primjene galvanskih metoda mjerenja otpornosti tla u elektrotehnici za određivanje otpornosti slojeva tla na mjestu predviđene ugradnje uzemljivača te geofizičkim istraživanjima koja se provode s ciljem proučavanja slojeva tla prema njihovoj električnoj vodljivosti, što omogućava primjenu u arheološkim istraživanjima, pronalaženju podzemnih voda i nalazišta minerala. Zbog važnosti i raširenosti upotrebe galvanskih metoda u elektroenergetici za određivanje strukture i otpornosti slojeva tla, što je od važnosti pri projektiranju uzemljenja, sustava uzemljenja i zaštite od udara munje, galvanske metode mjerenja električne otpornosti tla detaljno su opisane u međunarodnim normama [5-7]. Najčešće su korištene galvanske metode mjerenja električne otpornosti tla [5-7] Wennerova metoda (engl. *Wenner method*), Schlumbergerova metoda (engl. *Schlumberger method*), Metoda triju elektroda (pol-dipol metoda) (engl. *Three-electrode method*, (*Pole-dipole method*), dipol-dipol metoda (engl. *Dipole-dipole method*). Razmještaj elektroda za najčešće korištene galvanske metode mjerenja električne otpornosti tla prikazan je na slici 6.1 [8-13].



Slika 6.1 Dvoslojno tlo i galvanske metode mjerenja otpornosti tla: a) Wennerova metoda, b) Schlumbergerova metoda, c) Metoda triju elektroda (pol-dipol metoda), d) dipol-dipol metoda.

6.3 Prividna otpornost tla

Mjerenja galvanskim metodama provode se u koracima. Početno se odabere mali razmak elektroda te se pri tome razmaku izmjeri napon (U_V) koji mjeri voltmetar i struja (I) koja teče strujnim krugom. Zatim se mjerenje ponavlja pri sve većem i većem razmaku između elektroda. Izmjereni podaci napona (U_V) i struje (I) za svaki određeni razmak elektroda (a) unose se u tablicu te se izračunava omjer U_V / I za svaki određeni razmak elektroda. Iz tako dobivenih podataka izračunava se prividna otpornost tla. U posebnom slučaju, kada tlo ima horizontalne slojeve, tada se prividna otpornost može prikazati kao funkcija razmaka između susjednih elektroda. Izraz za prividnu otpornost koja se dobiva galvanskim mjerenjem otpornosti tla, prema [5-7], glasi:

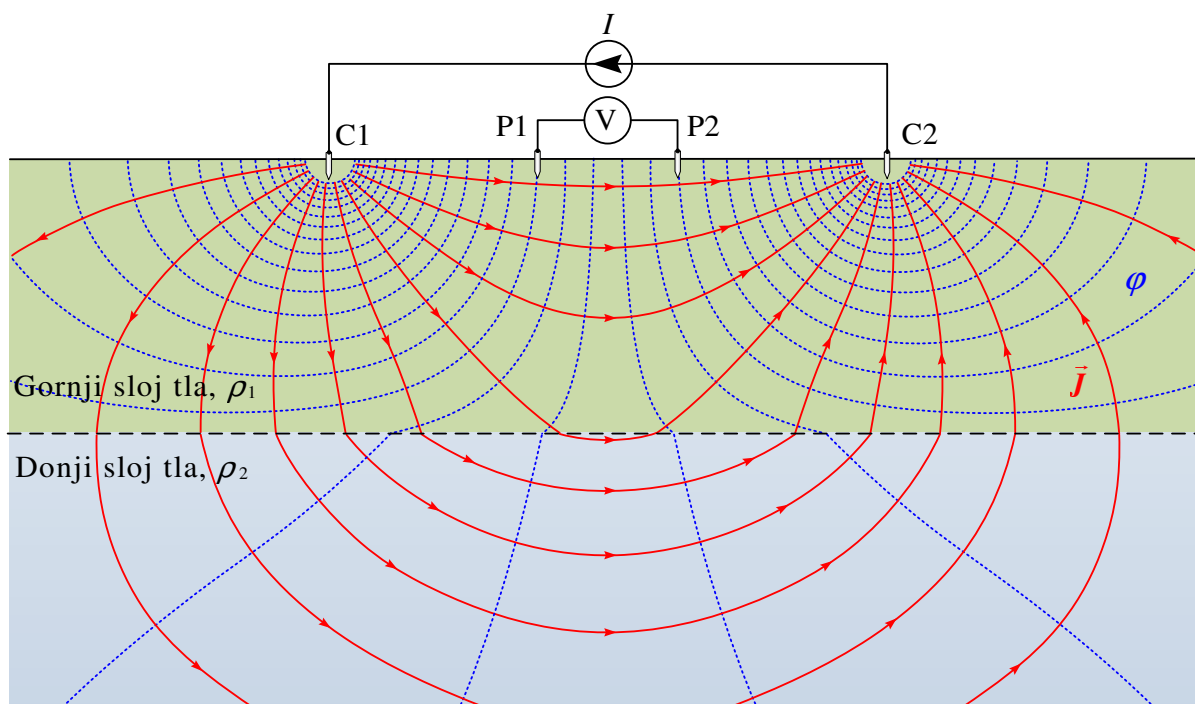
$$\rho_{\text{apparent}}(a) = G \cdot \frac{U_V}{I} \quad (6-1)$$

gdje je G geometrijski faktor koji je za svaku galvansku mjernu metodu drugačiji. Geometrijski faktor G za svaku pojedinu galvansku metodu mjerenja otpornosti tla dobiva se teorijski tako da se tlo predstavi kao homogeno te u tom slučaju prividna otpornost ne smije ovisiti o razmaku elektroda i mora biti jednaka otpornosti homogenog tla (navedeno će biti pokazano primjerom). Geometrijski faktor omogućava da se iz izmjerenih vrijednosti napona i struje, odnosno omjera U_V / I , što odgovara električnom otporu izračuna vrijednost prividne električne otpornosti tla.

Prividna otpornost tla (engl. *Apparent resistivity*) *je izračunata vrijednost otpornosti tla dobivena temeljem izmjerenog napona i struje. Prividna otpornost tla nije stvarna lokalna otpornost tla na lokalitetu na kojemu je provedeno mjerenje.* S obzirom da stvarno tlo nikada nije homogeno i izotropno (isto u svim smjerovima), rezultat za otpornost tla dobiven temeljem izmjerenog napona i struje, neovisno o mjernoj metodi i razmaku elektroda, kombinirana je (efektivna) vrijednost otpornosti svih slojeva tla kroz koje protječe struja tijekom mjerenja. *Prividna bi otpornost tla predstavljala stvarnu lokalnu otpornost tla samo u slučaju kada bi tlo bilo homogeno i izotropno.* S obzirom da se povećanjem razmaka između strujnih elektroda povećava dubina prodiranja struje u dublje slojeve tla, koje općenito imaju drugačiju otpornost od gornjih slojeva tla, mijenja se vrijednost prividne otpornosti tla s promjenom razmaka između strujnih elektroda.

6.4 Strujno polje i polje skalarnog električnog potencijala u tlu

Tijekom mjerenja prividne otpornosti tla galvanskim metodama između strujnih elektroda teče električna struja koja jednim dijelom svog puta teče kroz tlo, a drugim dijelom puta ožičenjem i kroz izvor (slika 6.2). Pri protjecanju struje kroz tlo uspostavlja se strujno polje koje je *uvijek nehomogeno* (slika 6.2). Gustoća struje (\vec{J}) najveća je uz površinu strujnih elektroda. Uz vektorsko polje gustoće struje (strujno polje) uspostavlja se i skalarno polje električnog potencijala. Skalarno polje električnog potencijala u tlu, što uključuje i granicu uz zrak gdje se provodi mjerenje napona između elektroda P1 i P2, ovisi o uspostavljenom strujnom polju u tlu. Radi navedenog, da bi se odredilo skalarno polje potencijala, potrebno je prvo poznavati strujno polje, odnosno vektorsko polje gustoće struje.



Slika 6.2 Schlumbergerov razmještaj elektroda, strujno polje i skalarni električni potencijal u dvoslojnom tlu u kojemu su otpornosti gornjeg i donjeg sloja različite. Gornji sloj tla ima manju otpornost od donjeg sloja tla. Silnice strujnog polja prikazane su crvenom bojom, a ekvipotencijalne krivulje prikazane su isprekidanim plavim krivuljama.

Jakost, smjer i orijentacija gustoće struje strujnog polja u tlu ovisi o strukturi tla (npr. broj slojeva tla), otpornosti pojedinih slojeva tla, debljini pojedinih slojeva tla, razmaku strujnih elektroda i jakosti utisnute struje u tlo. Uspostavljeno strujno polje u tlu mora zadovoljavati uvjete koje vrijede na granici dvaju medija različitih vodljivosti. Na granici diskontinuiteta električne vodljivosti, odnosno na granici između gornjeg sloja tla i zraka te na granici gornjeg sloja tla i donjeg sloja tla vrijede sljedeći uvjeti za normalnu (okomitu) i tangencijalnu (paralelnu) komponentu gustoće struje.

Normalna komponenta gustoće struje ostaje **kontinuirana** na granici dvaju medija različitih vodljivosti [2]:

$$\vec{n} \cdot \vec{J}_1 = \vec{n} \cdot \vec{J}_2. \quad (6-2)$$

Koristeći se oznakom „ \perp “ za normalnu (okomitu) komponentu polja, prethodni se izraz može zapisati u obliku:

$$\vec{J}_1^\perp = \vec{J}_2^\perp. \quad (6-3)$$

Tangencijalna komponenta gustoće struje je **diskontinuirana** na granici dvaju medija različitih vodljivosti [2]:

$$\vec{n} \times (\rho_1 \cdot \vec{J}_1) = \vec{n} \times (\rho_2 \cdot \vec{J}_2). \quad (6-4)$$

Koristeći se oznakom „ \parallel “ za tangencijalnu (paralelnu) komponentu polja, prethodni se izraz može zapisati u obliku:

$$\rho_1 \cdot \vec{J}_1^\parallel = \rho_2 \cdot \vec{J}_2^\parallel \quad (6-5)$$

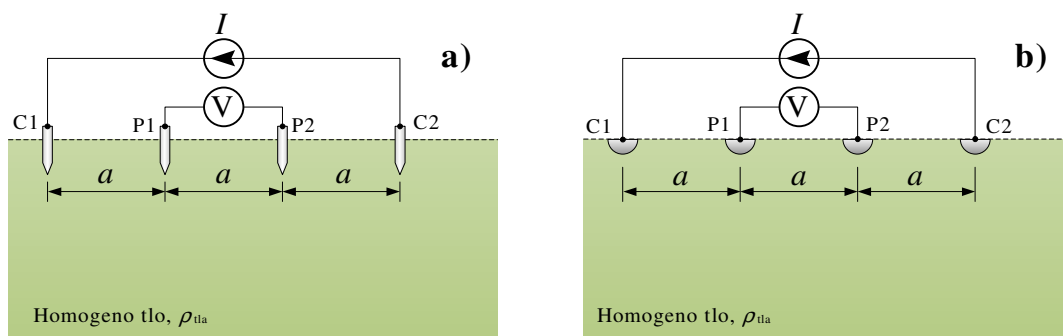
gdje je \vec{n} jedinični vektor normale na površinu granice između dvaju medija, a orijentiran je iz medija „1“ u medij „2“, ρ_1 otpornost medija „1“, ρ_2 otpornost medija „2“.

Za rješavanje ovakvih vrsta elektromagnetskih zadataka na raspolaganju je nekoliko metoda. Uobičajeno se koristi metoda odslikavanja (koriste se i nazivi metoda refleksije, metoda preslikavanja) izvora polja (engl. *Method of images, Image method*). Metoda odslikavanja koristi se za rješavanje elektromagnetskih zadataka na način da se umjesto rješavanja složenog sustava jednadžbi s graničnim uvjetima, elektromagnetska zadaća opiše korištenjem fiktivnih izvora polja (slike) na suprotnoj strani granične ravnine na način da električno i strujno polje zadovoljavaju prethodno navedene granične uvjete.

Neka za primjer primjene metode odslikavanja posluži jednostavniji primjer modeliranja strujnog polja i određivanje potencijala u homogenom (jednoslojnom) tlu s primjenom na određivanje prividnog otpora tla upotrebom Wennerove metode, odnosno geometrijskog faktora za Wennerovu metodu.

Primjer mjerenja otpornosti tla Wennerovom metodom: model jednoslojnog tla

Potrebno je odrediti izraz koji opisuje prividnu otpornost tla mjerenu Wennerovom mjernom metodom (slika 6.3a) ako je tlo homogeno i izotropno medij s konstantnom otpornosti ρ koji zauzima poluprostor ispod granice tlo-zrak. Izraz za prividnu otpornost koja se dobiva Wennerovom metodom glasi $\rho_{\text{apparent}}(a) = G \cdot (U_V / I)$, gdje je G geometrijski faktor za Wennerovu metodu. Prilikom modeliranja, štapne cilindrične elektrode zabijene u tlo mogu se predstaviti polukuglama (slika 6.3b). Neka je otpornost tla reda veličine $\rho_{\text{tla}} \approx 100 \Omega\text{m}$, a otpornost zraka reda veličine $\rho_{\text{zraka}} \approx 10^{18} \Omega\text{m}$ [4]. Potrebno je odrediti geometrijski faktor za Wennerovu metodu.



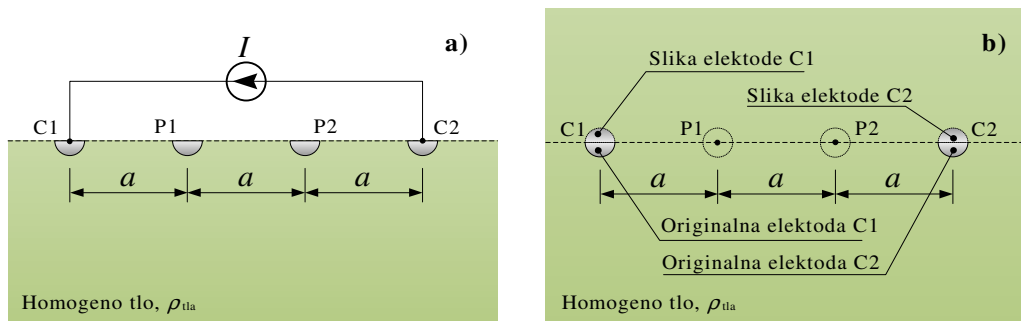
Slika 6.3 Wennerova metoda i homogeno tlo: a) stvarni izgled cilindričnih štapnih elektroda zabijenih u tlo, b) pojednostavljeno predstavljanje elektroda zabijenih u tlo s polukuglama.

Rješenje

Prema opisu zadatka potrebno je odrediti izraz za napon U_V kojega mjeri voltmetar, a koji odgovara razlici potencijala između elektroda P1 i P2:

$$U_V = \varphi_{P1} - \varphi_{P2}. \quad (6-6)$$

Stoga je potrebno odrediti električne potencijale na kojima se nalaze elektrode P1 i P2. Neka u tu svrhu posluži metoda odslikavanja izvora polja. Prije primjene metode odslikavanja pogodno je pojednostaviti ovu elektromagnetsku zadaću predstavljanjem kratkih štapnih cilindričnih elektroda ukopanih u tlo s polukuglama (slika 6.4a). Prema metodi odslikavanja, elektrode koje su izvori polja odslikavaju se od granice diskontinuiteta električne vodljivosti (granica tlo-zrak) na način da je slika elektrode jednako udaljena od granice kao i izvorna elektroda. Odslikane elektrode imaju izgled zrcalnih slika izvornih elektroda (slika 6.4b).



Slika 6.4 Wennerova metoda i homogeno tlo: a) Wennerov raspored elektroda predstavljenih polukuglama i homogeno tlo, b) odslikavanje strujnih elektroda C1 i C2 od granice tlo zrak.

Iznos odslikanih izvora polja, odnosno struja koje istječu iz slika strujnih elektroda C1 i C2 određeni su izrazima:

$$I'_{C1} = K \cdot I_{C1}, \quad (6-7)$$

$$I'_{C2} = K \cdot I_{C2} \quad (6-8)$$

gdje je K koeficijent odslikavanja (engl. *Reflection coefficient*), tj. omjer jakosti „zamišljenog“ (slike) izvora polja u odnosu na stvarni izvor polja koji je uveden kako bi se zadovoljili rubni uvjeti na granici između dvaju različitih medija, a određen je izrazom [5-7]:

$$K = \frac{\rho_{zraka} - \rho_{tla}}{\rho_{zraka} + \rho_{tla}} \quad (6-9)$$

gdje je ρ_{zraka} otpornost zraka ($\Omega \cdot m$), ρ_{tla} otpornost tla ($\Omega \cdot m$). Kako je $\rho_{zraka} \gg \rho_{tla}$ prema (6-9) dobiva se:

$$K = \frac{\rho_{zraka} - \rho_{tla}}{\rho_{zraka} + \rho_{tla}} \approx \frac{\rho_{zraka}}{\rho_{zraka}} = 1. \quad (6-10)$$

Uobičajeno se ovaj rezultat za koeficijent odslikavanja spram granice tlo-zrak pamti kako bi se u ovakvim i sličnim elektromagnetskim zadaćama ubrzao postupak rješavanja elektromagnetske zadaće!

Kako je dobivena brojčana vrijednost koeficijenta odslikavanja jedan ($K = 1$), struje slika vodiča koji su izvori polja, prema (6-7) i (6-8), iznose: $I'_{C1} = I_{C1}$, $I'_{C2} = I_{C2}$. Ukratko, iz izvorne polukugle kojom je predstavljena elektroda C1 istječe struja I_{C1} , a iz njezine slike oblika polukugle istječe jednaka struja ($I'_{C1} = I_{C1}$), što omogućava da se izvorni vodič elektrode C1 zajedno sa svojom slikom smatra kao jedan vodič oblika kugle iz kojega istječe struja $2I_{C1}$. Sve navedeno vrijedi i za strujnu elektrodu C2. Daljnji postupak u primjeni metode odslikavanja jest određivanje potencijala u tlu. Pri tome se smatra da je cijeli prostor oko izvornih vodiča koji su izvori polja i njihovih slika okruženi medijem koje ima svojstva kao i medij u kojemu se nalaze izvorni vodiči koji su izvori polja (slika 6.4b). **Pri određivanju potencijala valja imati na umu da izrazi za potencijal vrijede samo za dio prostora u kojemu se nalaze izvorni izvori polja, odnosno tlu.** Skalarni električni potencijal (φ) u prostoru oko osamljene kugle iz koje istječe struja jakosti I određena je izrazom [8-11]:

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{I}{r} \quad (6-11)$$

gdje je ρ otpornost medija u kojemu se nalazi kuglasti izvor polja ($\Omega \cdot m$), I jakost struje koja istječe (ili utječe) u kuglasti izvor polja (A), r radijalna udaljenost od središta kuglastog izvora polja (m).

Koristeći se prethodnim izrazom, uz uvažavanje da iz kugle (izvorni vodič i njegove slike) za elektrodu C1 istječe dvostruka struja u odnosu izvornu polukuglastu elektrodu C1, odnosno da iz kugle (izvorni vodič i njegove slike) za elektrodu C2 utječe (uvire) dvostruka struja u odnosu izvornu polukuglastu elektrodu C2, mogu se napisati izrazi za potencijale na mjestu naponskih elektroda P1 i P2:

$$\varphi_{P1} = \frac{\rho_{tla}}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r_{P1C1}} - \frac{\rho_{tla}}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r_{P1C2}}, \quad (6-12)$$

$$\varphi_{P2} = \frac{\rho_{tla}}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r_{P2C1}} - \frac{\rho_{tla}}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r_{P2C2}} \quad (6-13)$$

gdje je r_{P1C1} udaljenost između središta elektrode P1 i C1 (m), r_{P1C2} udaljenost između središta elektrode P1 i C2 (m), r_{P2C1} udaljenost između središta elektrode P2 i C1 (m), r_{P2C2} udaljenost između središta elektrode P2 i C2 (m).

Kako je $r_{P1C1} = a$, $r_{P1C2} = 2a$, $r_{P2C1} = 2a$, $r_{P2C2} = a$, izrazi za skalarne električne potencijale elektrode P1 i elektrode P2 mogu se zapisati u obliku:

$$\varphi_{P1} = \frac{\rho_{tla}}{4\pi} \cdot \frac{2I}{a} - \frac{\rho_{tla}}{4\pi} \cdot \frac{2I}{2a} = \frac{\rho_{tla}}{2\pi} \cdot \frac{I}{a} - \frac{\rho_{tla}}{2\pi} \cdot \frac{I}{2a} = \frac{\rho_{tla}}{2\pi} \cdot \frac{I}{2a}, \quad (6-14)$$

$$\varphi_{P2} = \frac{\rho_{tla}}{4\pi} \cdot \frac{2I}{2a} - \frac{\rho_{tla}}{4\pi} \cdot \frac{2I}{a} = \frac{\rho_{tla}}{2\pi} \cdot \frac{I}{2a} - \frac{\rho_{tla}}{2\pi} \cdot \frac{I}{a} = -\frac{\rho_{tla}}{2\pi} \cdot \frac{I}{2a}. \quad (6-15)$$

Uvrštavanjem prethodnih dvaju izraza u izraz za napon koji mjeri voltmetar (6-6) daje:

$$U_V = \varphi_{P1} - \varphi_{P2} = \frac{\rho_{tla}}{2\pi} \cdot \frac{I}{2a} - \left(-\frac{\rho_{tla}}{2\pi} \cdot \frac{I}{2a} \right) = \frac{\rho_{tla}}{2\pi} \cdot \frac{I}{a}. \quad (6-16)$$

Iz prethodnog izraza dobiva se:

$$\frac{U_V}{I} = \frac{\rho_{tla}}{2\pi} \cdot \frac{1}{a}. \quad (6-17)$$

Prema definiciji, prividna otpornost dana je izrazom:

$$\rho_{\text{apparent}}(a) = G \cdot \frac{U_V}{I}. \quad (6-18)$$

Uvrštavanjem izraza (6-17) u prethodni izraz dobiva se:

$$\rho_{\text{apparent}}(a) = G \cdot \left(\frac{\rho_{tla}}{2\pi} \cdot \frac{1}{a} \right). \quad (6-19)$$

Kako je tlo *homogeno i izotropno*, prividna otpornost ne ovisi o razmaku elektroda i jednaka je otpornosti tla, tj. vrijedi $\rho_{\text{apparent}}(a) = \rho_{\text{tla}}$. Stoga iz izraza (6-19) proizlazi:

$$G \cdot \frac{\rho_{\text{tla}}}{2\pi} \cdot \frac{1}{a} = \rho_{\text{tla}}. \quad (6-20)$$

Sređivanjem prethodnog izraza dobiva se iznos geometrijskog faktora za Wennerovu metodu mjerenja otpornosti tla:

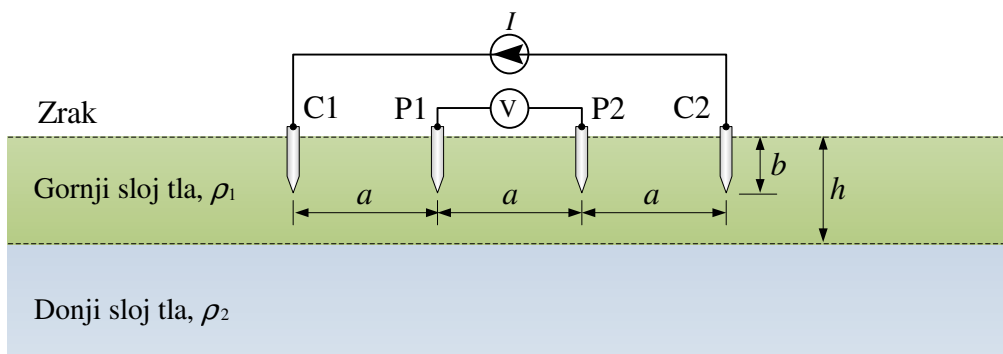
$$G = 2\pi a. \quad (6-21)$$

Kombiniranjem izraza (6-18) i (6-21), dobiva se izraz za prividnu otpornost mjerenu Wennerovom metodom [5-7]:

$$\rho_{\text{apparent}}(a) = 2\pi a \cdot \frac{U_V}{I}. \quad (6-22)$$

6.5 Dvoslojno tlo i Wennerova metoda mjerenja otpornosti tla

Kako je Wennerova metoda mjerenja otpornosti tla najčešće korištena galvanska metoda mjerenja otpornosti tla i od velike važnosti u elektrotehnici, gdje se pri korištenju Wennerove metode najčešće koristi dvoslojni model tla, daljnji fokus u ovom poglavlju bit će na Wennerovu metodu mjerenja otpornosti tla koje se može smatrati dvoslojnim (slika 6.5 [8-11]). Na slici 6.5 prikazan je raspored elektroda pri Wennerovoj metodi mjerenja otpornosti tla i relevantne fizikalne veličine. Wennerova metoda mjerenja otpornosti tla koristi četiri elektrode koje se zabijaju u tlo duž pravca. Vanjske elektrode (oznake C1 i C2), nazivaju se još i strujnim elektrodama (engl. *Current*, odatle potječu oznake) služe za vođenje struje, a unutarnje elektrode (oznake P1 i P2), služe za mjerenje napona. Svaka od unutarnjih elektroda nalazi se na određenom potencijalu (engl. *Potential*), odakle i potječu oznake P1 i P2. Razmak je između susjednih elektroda konstantan pri svakom mjerenju i označen s a . Mjerenje se provodi u koracima, a započinje s malim razmakom između susjednih elektroda. U svakom novom koraku povećava se razmak između susjednih elektroda. U svakom koraku izmjeri se struja I koja teče između strujnih elektroda C1 i C2 i napon voltmetra U_V koji mjeri razliku potencijala između elektroda P1 i P2 (potencijalne elektrode). Nakon provedenog mjerenja dobivaju se iznosi napona U_V i struje I za svaki pojedini razmak elektroda a . Ovi podaci služe za određivanje prividne otpornosti tla. Iz podataka o prividnoj otpornosti tla moguće je odrediti otpornost gornjeg i donjeg sloja tla te debljinu gornjeg sloja tla [8-11].



Slika 6.5 Dvoslojno tlo, Wennerova metoda i relevantne veličine.

Ovisnost prividnog otpora o razmaku elektroda dana je izrazom [5-7]:

$$\rho_{\text{apparent}}(a) = \frac{4\pi a}{1 + \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \cdot \frac{U_V}{I} \quad (6-23)$$

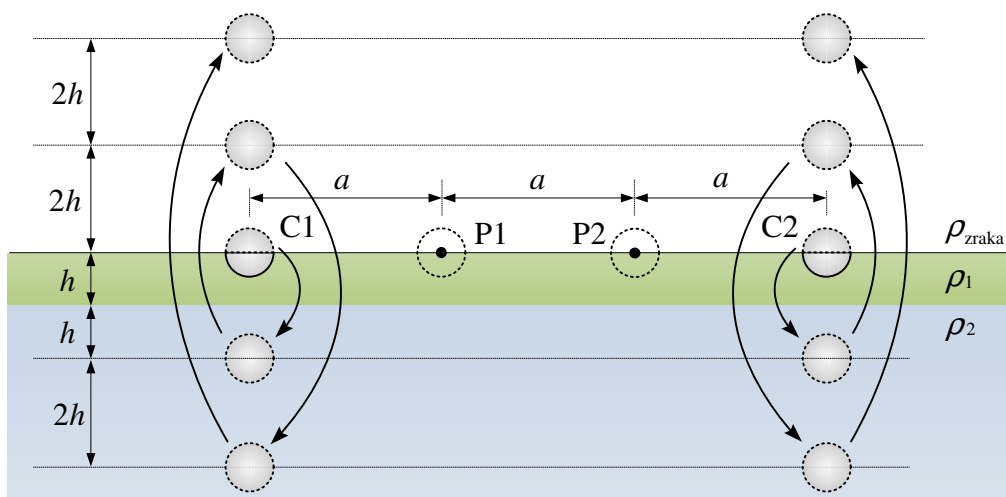
gdje je a razmak između susjednih elektroda (m), b dubina ukopanog dijela elektroda (m), U_V napon izmjeren voltmetrom (V), I struja izmjerena ampermetrom (A).

Kada je razmak između susjednih elektroda puno veći od duljine ukopanog dijela metalnih elektroda ($a \gg b$), prethodni se izraz može znatno pojednostaviti te glasi [5-7]:

$$\rho_{\text{apparent}}(a) = G \cdot \frac{U_V}{I} = 2\pi a \cdot \frac{U_V}{I} \quad (6-24)$$

gdje je G geometrijski faktor za Wennerovu metodu ($G = 2\pi a$), a razmak između susjednih elektroda (m), U_V izmjeren napon voltmetrom (V), I izmjerena struja koja teče između strujnih elektroda (A).

Koristeći se metodom odslikavanja može se izvesti analitički izraz koji opisuje ovisnost prividne otpornosti tla o razmaku elektroda za Wennerovu metodu. Kako u ovom slučaju dvoslojnog tla postoje dva diskontinuiteta električne vodljivosti, jedan na ravnini između gornjeg sloja tla i zraka te drugi na ravnini između gornjeg i donjeg sloja tla, što uzrokuje višestruka odslikavanja, pogodno je skicirati slijed odslikavanja prvih nekoliko slika izvora polja (slika 6.6 [8]). Navedeno će omogućiti matematičko formuliranje obrasca po kojemu se odvija odslikavanje.



Slika 6.6 Dvoslojno tlo, relevantne fizikalne veličine i slijed odslikavanja kuglastih izvora polja od granica diskontinuiteta električne vodljivosti (prvih nekoliko slika).

Skalarni električni potencijal (φ) u prostoru oko osamljene kugle iz koje istječe struja jakosti I određena je izrazom [8-11]:

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{I}{r} \quad (6-25)$$

gdje je ρ otpornost medija ($\Omega \cdot m$), I jakost struje koja istječe/utječe u kuglasti izvor polja (A), r radijalna udaljenost od središta kuglastog izvora polja (m).

Zbog simetrije elektromagnetske zadaće vrijedi $\varphi_{P1} = -\varphi_{P2}$, stoga je u daljnjem izvoru prividnog otpora dovoljno odrediti izraz za potencijal elektrode P1. Prvo odslikavanje strujnih elektroda C1 i C2 odvija se od granice tlo-zrak. Nakon odslikavanja, iz nastalih slika istječu/uviru jednake struje kao i iz izvornih elektroda. Navedeno omogućava da se izvorne elektrode zajedno sa svojom slikama smatraju ekvivalentnim izvorom polja kuglastog oblika iz kojih istječu/uviru struje dvostrukog iznosa u odnosu na izvorne elektrode (slika 6.6 [8]). Potencijal elektrode P1 uslijed struja ekvivalentnih izvora polja glasi:

$$\varphi_{P1} = \frac{\rho_1}{4\pi} \cdot \frac{2I}{a} - \frac{\rho_1}{4\pi} \cdot \frac{2I}{2a} = \frac{\rho_1}{2\pi} \cdot \frac{I}{a} - \frac{\rho_1}{2\pi} \cdot \frac{I}{2a} = \frac{\rho_1}{2\pi} \cdot \frac{I}{2a}. \quad (6-26)$$

Prethodno određenom potencijalu treba pribrojiti potencijal nastao uslijed daljnjeg odslikavanja ekvivalentnih izvora polja oblika kugli iz prvog odslikavanja, što daje:

$$\varphi_{P1} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{2K^n}{\sqrt{a^2 + (2hn)^2}} - \frac{2K^n}{\sqrt{(2a)^2 + (2hn)^2}} \right) \right] \quad (6-27)$$

gdje je K koeficijent odslikavanja, a određen izrazom [5-7]:

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (6-28)$$

gdje je ρ_1 otpornost gornjeg sloja tla ($\Omega \cdot m$), ρ_2 otpornost donjeg sloja tla ($\Omega \cdot m$).

Nakon izlučivanja člana $1/a$ u prethodnom izrazu, dobiva se:

$$\varphi_{P1} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \frac{1}{a} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{2K^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{2hn}{a}\right)^2}} - \frac{2K^n}{\sqrt{4 + \left(\frac{2hn}{a}\right)^2}} \right) \right]. \quad (6-29)$$

Kako je $\varphi_{P1} = -\varphi_{P2}$, napon izmjeren voltmetrom jest $U_V = \varphi_{P1} - \varphi_{P2} = \varphi_{P1} - (-\varphi_{P1}) = 2\varphi_{P1}$, što uz uvažavanje (6-29), daje:

$$U_V = \frac{I\rho_1}{2\pi} \frac{1}{a} \left[1 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{4K^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{2hn}{a}\right)^2}} - \frac{4K^n}{\sqrt{4 + \left(\frac{2hn}{a}\right)^2}} \right) \right]. \quad (6-30)$$

Koristeći se prethodnim izrazom može se odrediti omjer U_V / I :

$$\frac{U_V}{I} = \frac{\rho_1}{2\pi} \frac{1}{a} \left[1 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{4K^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{2hn}{a}\right)^2}} - \frac{4K^n}{\sqrt{4 + \left(\frac{2hn}{a}\right)^2}} \right) \right]. \quad (6-31)$$

Izraz za prividnu otpornost koja se dobiva Wennerovom metodom glasi:

$$\rho_{\text{apparent}}(a) = G \cdot \frac{U_V}{I} \quad (6-32)$$

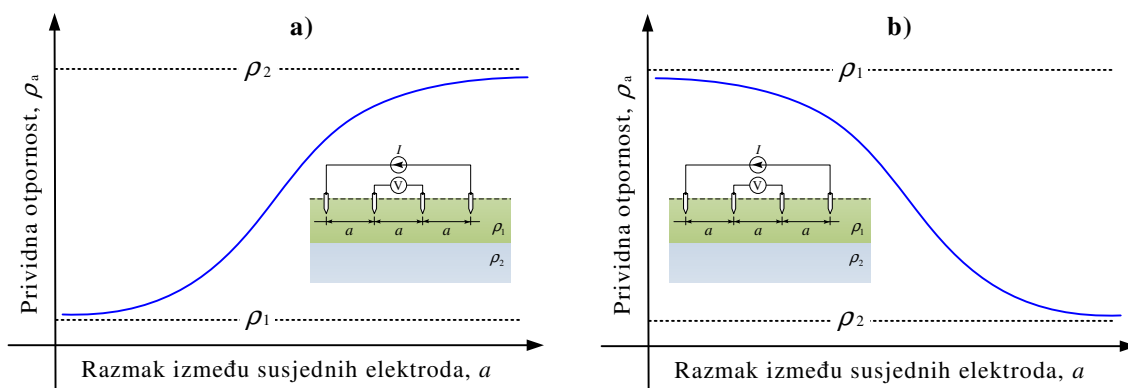
gdje je G geometrijski faktor za Wennerovu metodu koji glasi $G = 2\pi a$ [5-7].

Uvrštavanjem (6-31) u izraz (6-32), uz uvažavanje da je geometrijski faktor $G = 2\pi a$, daje izraz za prividnu otpornost dvoslojnog tla mjerenu Wennerovom metodom [5-7]:

$$\rho_{\text{apparent}}(a) = \rho_1 \left[1 + 4 \cdot \sum_{n=1}^N \left(\frac{K^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{2nh}{a}\right)^2}} - \frac{K^n}{\sqrt{4 + \left(\frac{2nh}{a}\right)^2}} \right) \right] \quad (6-33)$$

gdje je $\rho_{\text{apparent}}(a)$ prividni otpor tla ($\Omega \cdot \text{m}$), a razmak između susjednih elektroda (m), h debljina gornjeg sloja tla (m), n cijeli broj, N broj uvaženih odslikavanja (cijeli broj) koji bi za točan rezultat težio beskonačnosti, ali s obzirom na konvergenciju prividnog otpora prema točnom rezultatu dovoljno je da bude jednak ili veći od 20 [13], K koeficijent odslikavanja.

Za male razmake između strujnih elektroda (u odnosu na debljinu gornjeg sloja tla) veći udio struje koja se zatvara kroz tlo protječe gornjim slojem tla, što se odražava u izmjerenoj prividnoj otpornosti koja je brojčano bliska iznosu gornjeg sloja tla. Vrijedi i obrnuto, za velike razmake između strujnih elektroda (u odnosu na debljinu gornjeg sloja tla) veći udio struje koja se zatvara kroz tlo protječe donjim slojem tla, što se odražava u izmjerenoj prividnoj otpornosti koja je brojčano bliska iznosu donjeg sloja tla (slika 6.7).



Slika 6.7 Ovisnost prividne otpornosti dvoslojnog tla o razmaku između elektroda kada je a) gornji sloj tla manje otpornosti od donjeg sloja tla, b) kada je gornji sloj tla veće otpornosti od donjeg sloja tla.

Popis literature

- [1] „Električna otpornost“, *Tehnički leksikon* (mrežno izdanje), Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2025. dostupno na <https://tehnicki.lzmk.hr/clanak/otpornost-elektricna>, (pristupljeno 23.6.2025.)
- [2] Zijad Haznadar, Željko Štih, *Elektromagnetizam 1*, Zagreb: Školska knjiga, 1997. ISBN-13: 978-953-0-31634-8
- [3] Vjekoslav Srb, *Električne instalacije i niskonaponske mreže*, Zagreb: Tehnička knjiga, 1991. ISBN: 86-7059-108-1
- [4] Engineering ToolBox, *Resources, Tools and Basic Information for Engineering and Design of Technical Applications*, dostupno na: https://www.engineeringtoolbox.com/engineering-materials-properties-d_1225.htm, (pristupljeno 23.6.2025.)
- [5] IEEE, *IEEE Guide for Measurements of Electromagnetic Properties of Earth Media*, IEEE Std 356-2001 (Revision of IEEE Std 356-1974), New York: The Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2002, doi: 10.1109/IEEESTD.2002.93616.
- [6] IEEE, *IEEE Guide for Measuring Earth Resistivity, Ground Impedance, and Earth Surface Potentials of a Grounding System*, IEEE Std 81-1983, (Revision of IEEE Std. 81 -1962). New York: The Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1983.
- [7] IEEE, *IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding*, IEEE Std 80-2000 (Revision of IEEE Std 80-1986). New York: The Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2000. ISBN 0-7381-1926-1
- [8] Tomislav Barić, Damir Šljivac, Marinko Stojkov, „Validity Limits Of The Expression For Measuring Soil Resistivity By The Wenner Method According To IEEE Standard 81-1983“, *Journal of Energy*, vol. 56, br. 6, str. 730–753, 2007. ISSN: 0013-7448
- [9] Tomislav Barić, Lajos Jozsa, Hrvoje Glavaš „Capacitive influence of high voltage overhead transmission lines on measurement of soil Resistivity“, *Journal of Energy*, vol. 56, br. 2, 2007, str. 232–249. ISSN: 0013-7448
- [10] Tomislav Barić, Vedran Boras, Radoslav Galić, „Nadomjesni model tla zasnovan na umjetnim neuronskim mrežama“, *Energija: časopis Hrvatske elektroprivrede*, vol. 56, br. 1, 2007, str. 96-113, ISSN: 0013-7448
- [11] Tomislav Barić, Vedran Boras, Hrvoje Glavaš, „A simplified procedure for approximate determination of electro-geometrical parameters of two-layer soil“, *Technical gazette (Tehnički vjesnik)*, vol. 19, br. 2, 2012, ISSN: 1330-3651
- [12] Martina Pavić, *Modelling of galvanic methods of soil resistivity measurement using Ansys software*, diplomski rad, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek (FERIT), Osijek, Hrvatska, 2024.
- [13] Tomislav Barić, Martina Pavić, Hrvoje Glavaš, Modelling of the Wenner Method Using the Finite Element Method, 34th International Scientific Conference Organisation and Maintenance Technology – OTO 2025, Osijek, Croatia, 2025, doi: 10.3390/engproc2026125010, dostupno na: <https://www.mdpi.com/2673-4591/125/1/10> (pristupljeno 08.02.2026.)

7. MODELIRANJE ELEKTROMAGNETSKIH ZADAĆA PROGRAMSKIM PAKETOM ANSYS

1. Vježba, polje i potencijal u prostoru oko osamljene nabijene kugle

U ovoj vježbi potrebno je u programskom paketu Ansys modelirati elektrostatsku zadaću u kojoj se određuje električno polje i skalarni električni potencijal u prostoru oko osamljene nabijene metalne kugle. Za razumijevanje ove elektromagnetske zadaće potrebna su osnovna znanja iz elektrotehnike koja su iznesena u teorijskom dijelu ovog priručnika. Zbog jednostavnosti teorije koja prati ovu elektromagnetsku zadaću, fokus rada moguće je usmjeriti na rad u programskom paketu Ansys, odnosno na sam proces modeliranja. Iz tog je razloga ova elektromagnetska zadaća odabrana kao prva, odnosno za uvodni primjer.

2. Vježba, modeliranje uzemljivača programskim paketom Ansys

U ovoj vježbi potrebno je u programskom paketu Ansys modelirati kvazistatičku zadaću u kojoj se određuje skalarni električni potencijal u prostoru oko ukopanog vertikalnog cjevastog uzemljivača kada on odvodi struju u okolno tlo. Za ovaj zadatak potrebno je poznavati teoriju strujnih polja i teoriju uzemljivača, što je izneseno u teorijskom dijelu ovog priručnika. S obzirom da je pretpostavljeno da čitatelj ovog priručnika po prvi puta modelira uzemljivač u programskom paketu Ansys, iz didaktičko-metodičkih razloga odabran je geometrijski vrlo jednostavan uzemljivač. Ujedno, određene rutine i radnje pri korištenju programskog paketa Ansys identične su onima iz prve vježbe te će čitatelj u ovoj vježbi imati priliku stjecati rutinu u korištenju programskog paketa Ansys u modeliranju elektromagnetskih zadaća.

3. Vježba, modeliranje Wennerove metode programskim paketom Ansys

U ovoj vježbi potrebno je u programskom paketu Ansys modelirati dvoslojno tlo i Wennerovu mjernu metodu za određivanja prividnog otpora dvoslojnog tla. Za ovaj zadatak potrebno je poznavati teoriju strujnih polja i teoriju uzemljivača, što je izneseno u teorijskom dijelu ovog priručnika. U ovoj će vježbi čitatelj imati priliku naučiti koristi dodatne mogućnosti koje pruža programski paket Ansys kao što su definiranje funkcija i automatizacija procesa numeričkog proračuna. Ujedno, određene rutine i radnje pri korištenju programskog paketa Ansys identične su onima iz prethodnih dviju vježbi te će čitatelj u ovoj vježbi imati priliku utvrđivati stečeno iskustvo u korištenju programskog paketa Ansys u modeliranju elektromagnetskih zadaća.

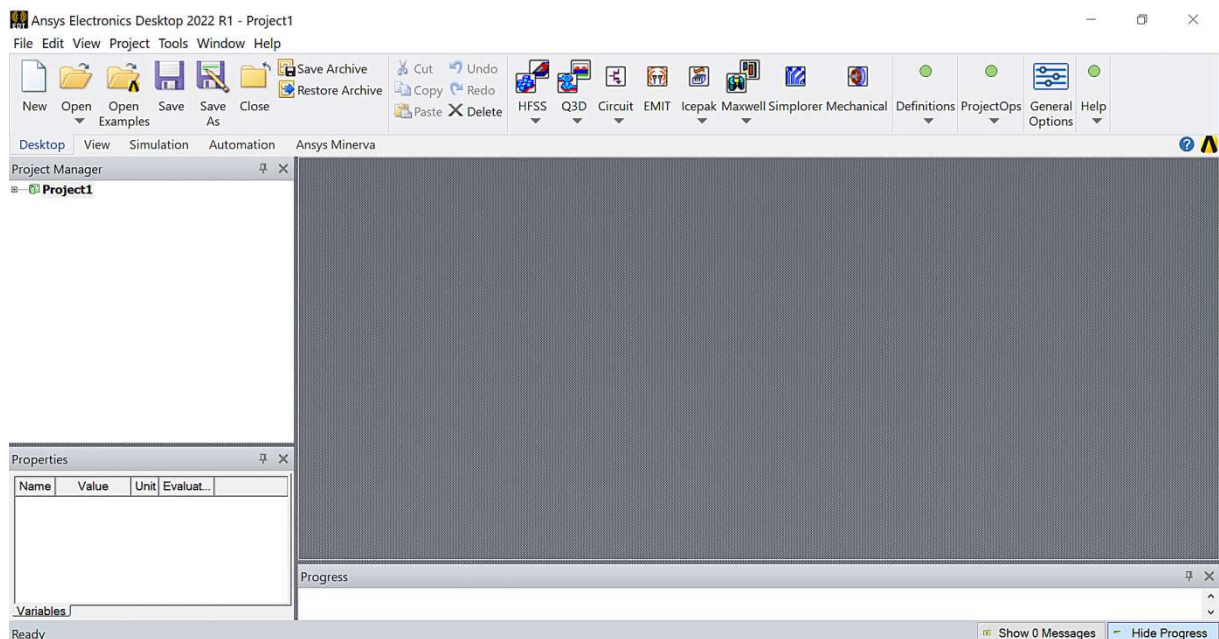
8. POLJE I POTENCIJAL U PROSTORU OKO NABIJENE KUGLE

Klikom na ikonu programskog paketa Ansys na monitoru se pojavljuje pozdravni zaslon (engl. *Splash screen*) koji ima izgled kako je prikazano na slici 8.1.



Slika 8.1 Pozdravni zaslon programskog paketa Ansys.

Učitavanje je programskog paketa Ansys automatsko kao i povezivanje na mrežu, a po završetku učitavanja i uspostave mreže, u svrhu provjere valjanosti licence, pojavljuje se glavni prozor programa kao na slici 8.2.



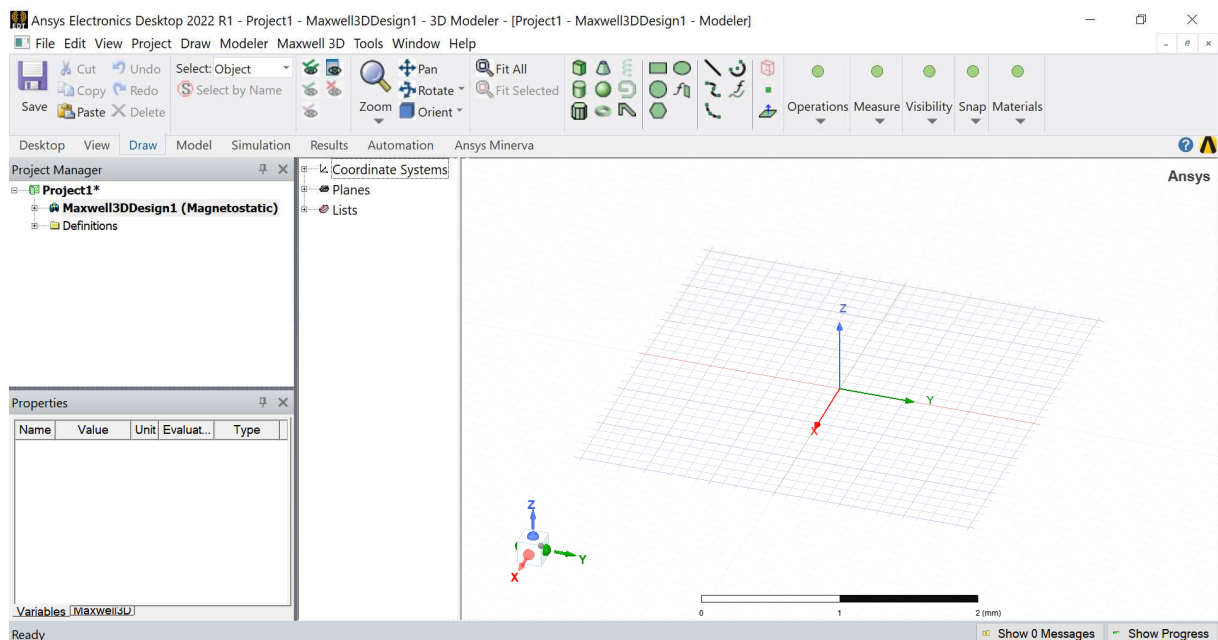
Slika 8.2 Glavni prozor programskog paketa Ansys.

Za potrebe vježbi prikazanih u ovom priručniku koristit će se programski modul Maxwell namijenjen za simulaciju i analizu elektromagnetskih zadataka na niskim frekvencijama. Izbor programskog modula Maxwell obavlja se na način kako je to prikazano slikom 8.3.



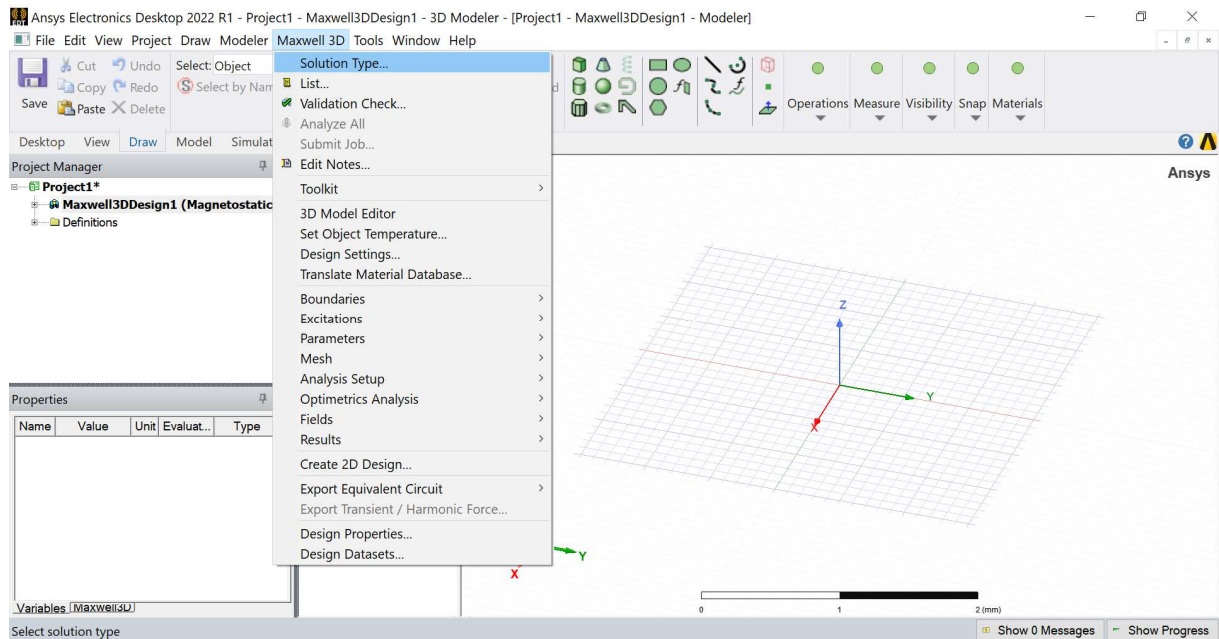
Slika 8.3 Izbor programskog modula Maxwell 3D.

Nakon izbora programskog modula Maxwell 3D, pojavljuje se prozor kao na slici 8.4. Programski modul Maxwell koristi visokospecijalizirane rješavače elektromagnetskih zadataka zasnovane na različitim skupovima Maxwellovih jednažbi, odnosno različitim formulacijama elektromagnetskih polja za čije se rješavanje koristi metoda konačnih elemenata (MKE). Ovisno o tome za koju se vrstu elektromagnetske zadatke želi ishoditi rješenje „*Solution Type*“, izbor rješavača elektromagnetskih polja nalazi se pod opcijom „*Solution Type*“ uz podjelu na dva skupa pod nazivima „*Magnetic*“ i „*Electric*“. U skupu „*Magnetic*“ moguće je odabrati tri rješavača elektromagnetske zadatke po nazivima „*Magnetostatic*“, „*Eddy Current*“ i „*Transient*“. U skupu „*Electric*“ moguće je odabrati tri rješavača elektromagnetske zadatke pod nazivima „*Electrostatic*“, „*DC Conduction*“ i „*Electric Transient*“. Ovisno o zadanim (unaprijed definiranim) postavkama programskog paketa Ansys pojavljuje se određeni rješavač elektromagnetskih zadataka. Prema slici 8.4 to je rješavač elektromagnetskih zadataka za magnetostatiku (engl. *Magnetostatic*).

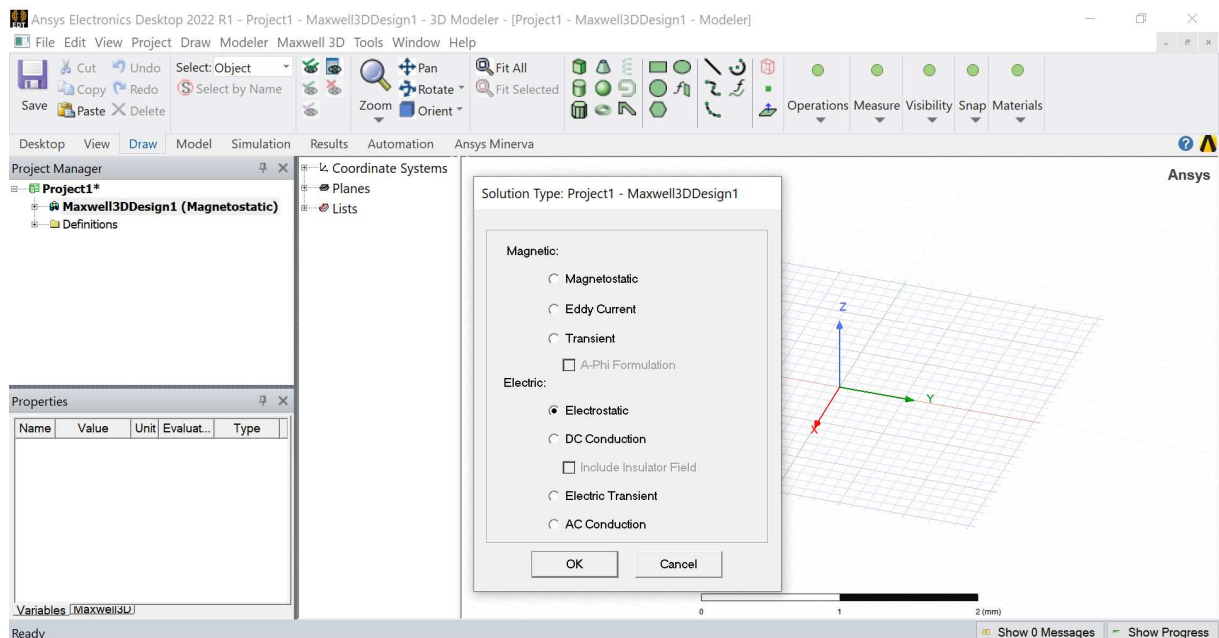


Slika 8.4 Glavni prozor programskog paketa Ansys i „*Project Manager*“ u kojemu je vidljiv trenutno postavljen rješavač elektromagnetskih zadataka.

Kako bi se promijenio rješavač elektromagnetske zadaće u „*Electrostatic*“ potrebno je promijeniti „*Solution Type*“, što se obavlja na način kako je prikazano na slici 8.5. i slici 8.6.



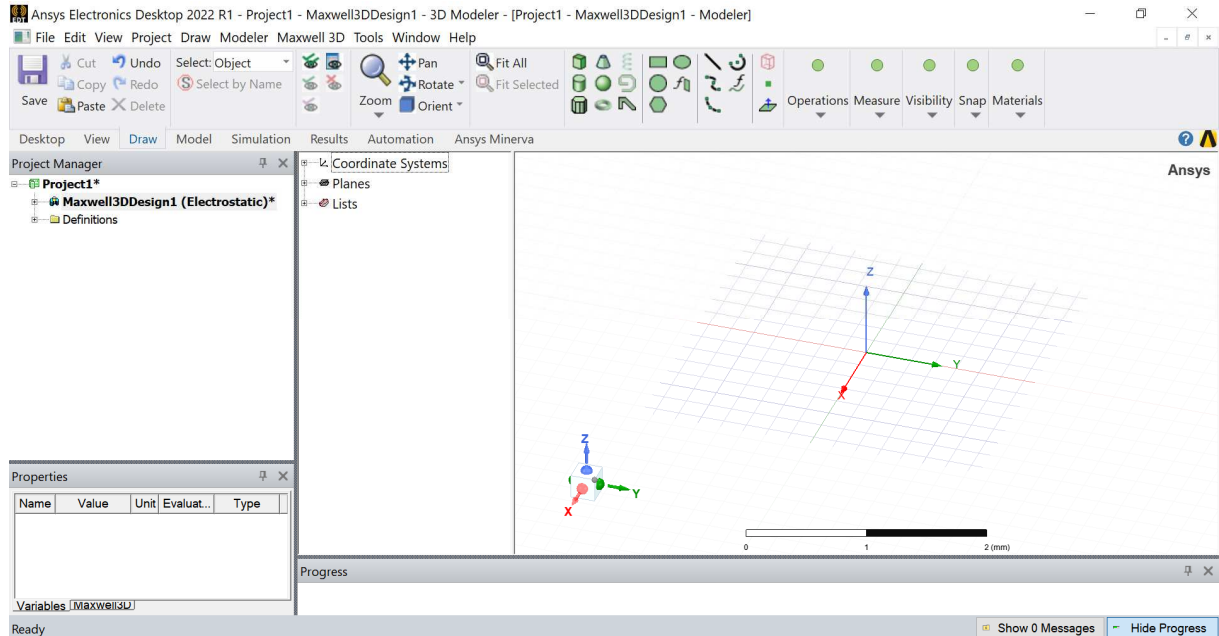
Slika 8.5 Glavni prozor programskog paketa Ansys i odabir opcije „*Solution type*“.



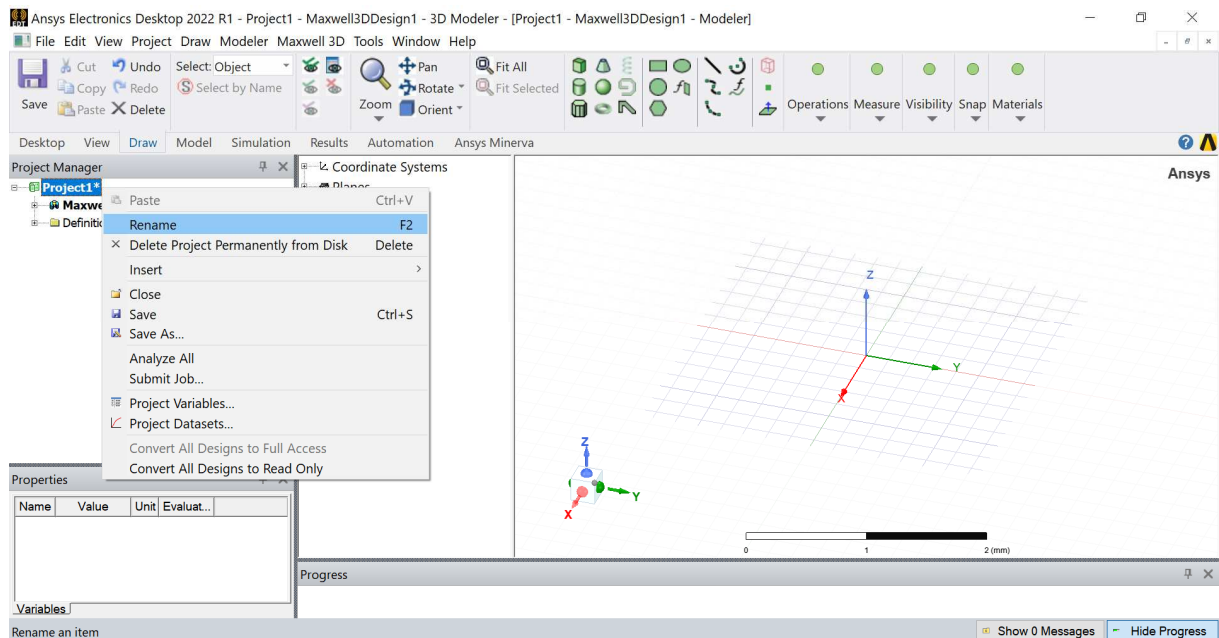
Slika 8.6 Izbor rješavača elektromagnetske zadaće „*Electrostatic*“.

Nakon klika na tipku „*OK*“ prikazano na slici 8.6 mijenja se rješavač elektromagnetske zadaće, što se može vidjeti u polju „*Project Manager*“ kako je to prikazano na slici 8.7.

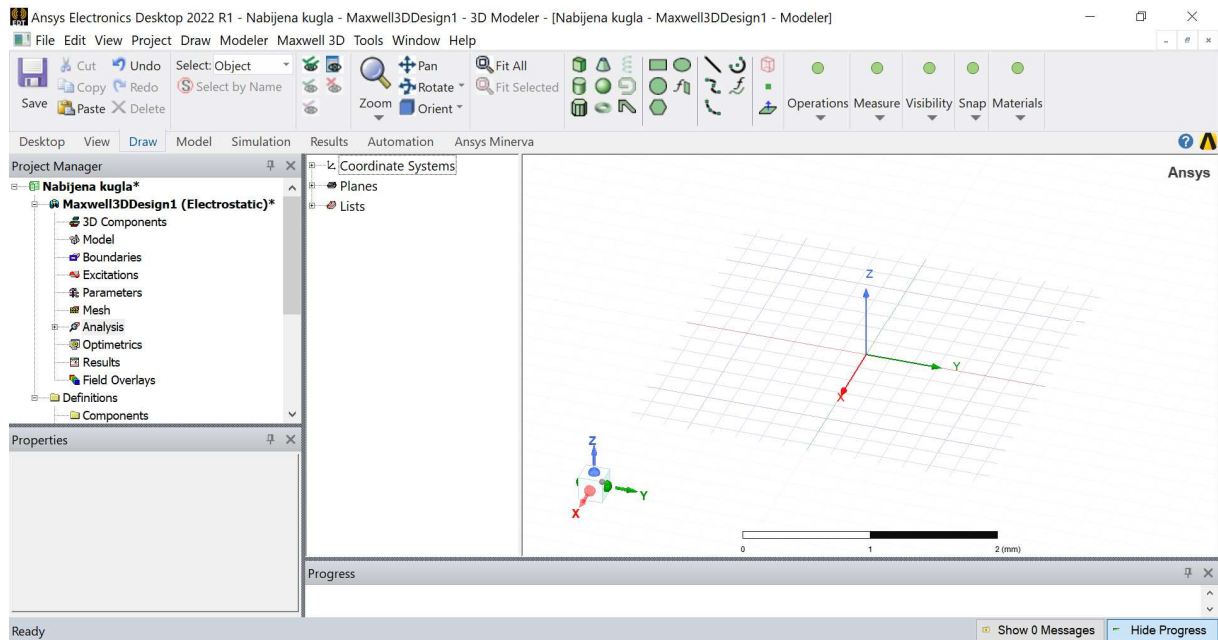
Promjena imena projekta obavlja se desnim klikom miša na polju pod nazivom „*Project1*“ nakon čega se otvara opcija „*Rename*“. Klikom na opciju „*Rename*“ omogućava se imenovanje projekta po vlastitom izboru kao što je prikazano na slici 8.8 i slici 8.9.



Slika 8.7 Izgled glavnog prozora nakon promjene rješavača elektromagnetske zadaće.

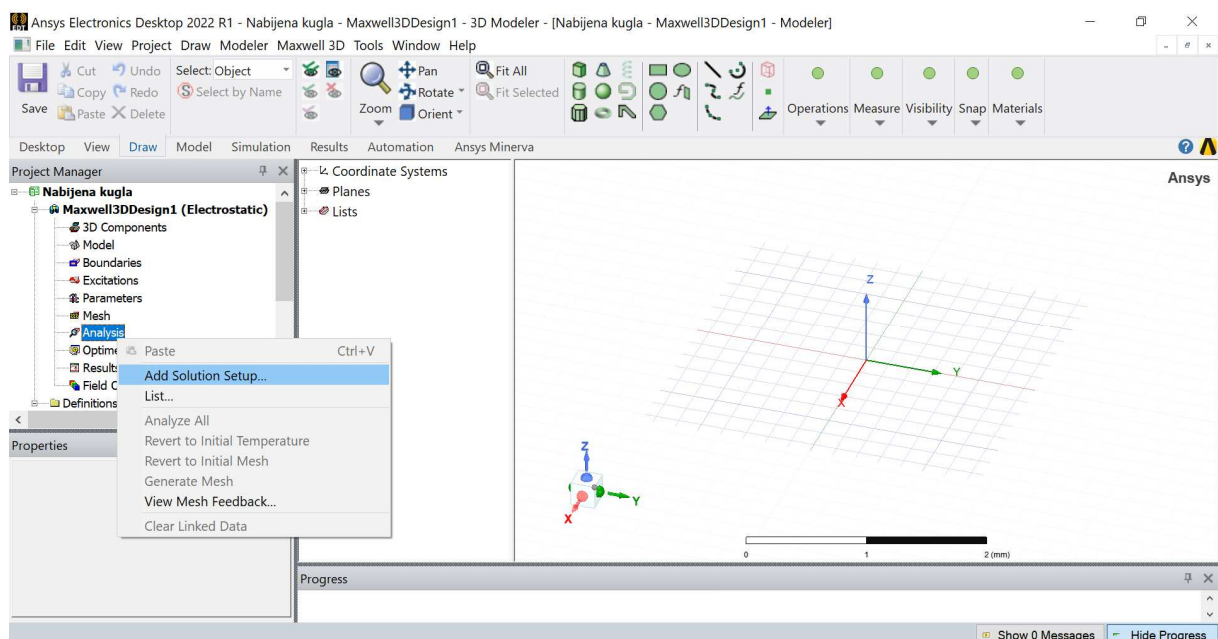


Slika 8.8 Promjena imena projekta u voditelju projekta „*Projekt Manager*“.

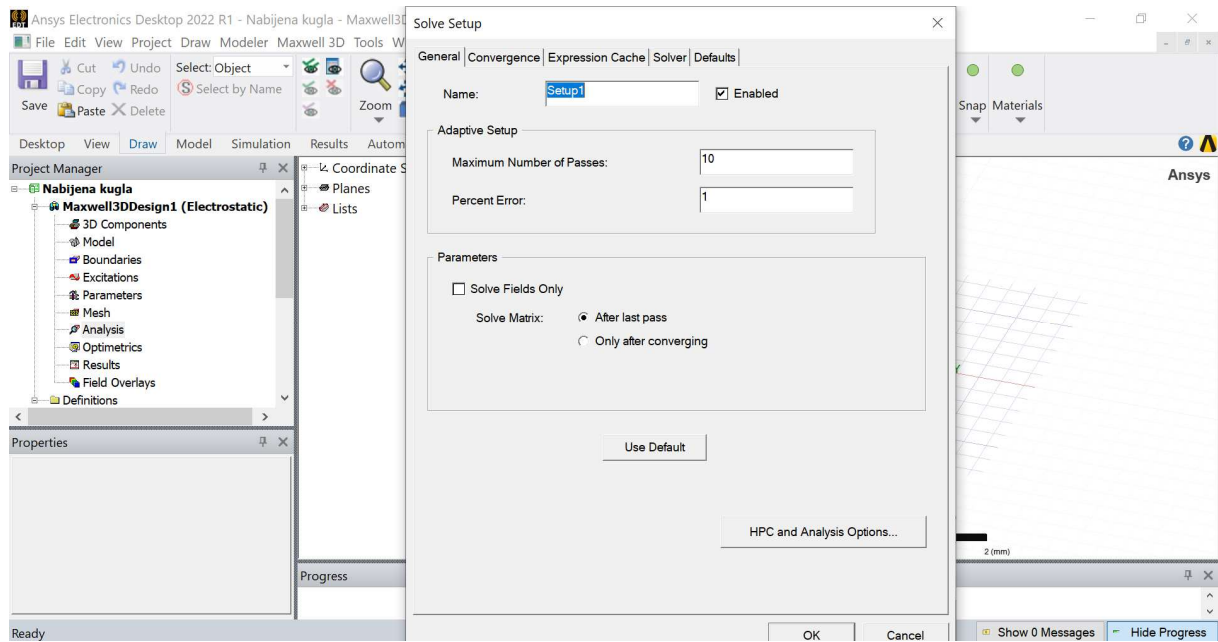


Slika 8.9 Izgled glavnog prozora nakon promjene imena projekta.

Prije modeliranja i pokretanja simulacije u programskom paketu Ansys potrebno je postaviti parametre simulacije. Navedeno se obavlja desnim klikom miša u polju pod nazivom „*Project Manager*“ na opciji pod nazivom „*Analysis*“, nakon čega se pojavljuje izbornik u kojemu treba odabrati opciju „*Add Solution Setup*“ (slika 8.10). Nakon izbora opcije „*Add Solution Setup*“ pojavljuje se prozorčić kako je prikazano na slici 8.11. Ovisno o vrsti simulacije i željenoj točnosti, zadane vrijednosti parametara simulacije mogu se promijeniti.

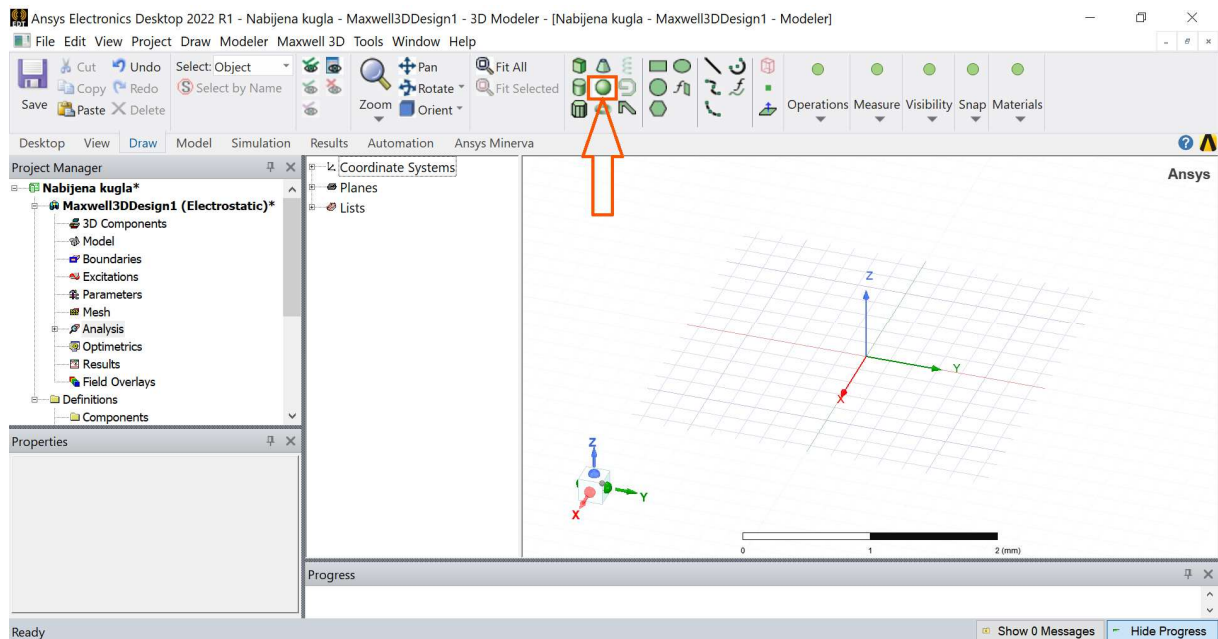


Slika 8.10 Izgled glavnog prozora nakon desnog klika miša na opciju „*Analysis*“.

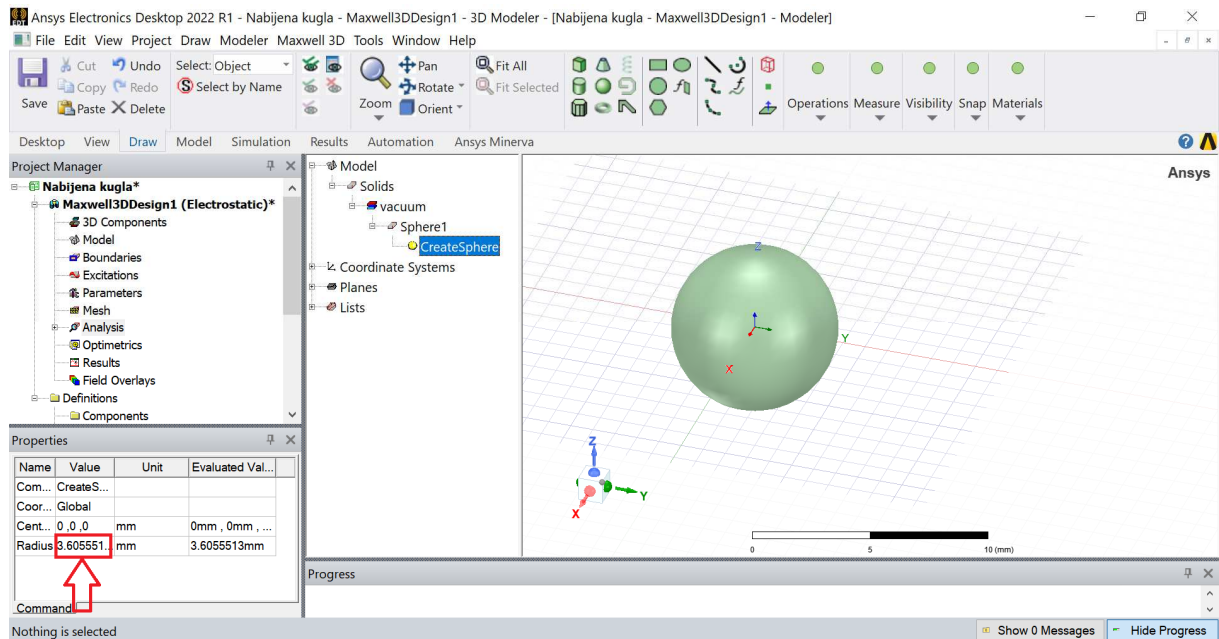


Slika 8.11 Izgled glavnog prozora nakon izbora opcije „Add Solution Setup“.

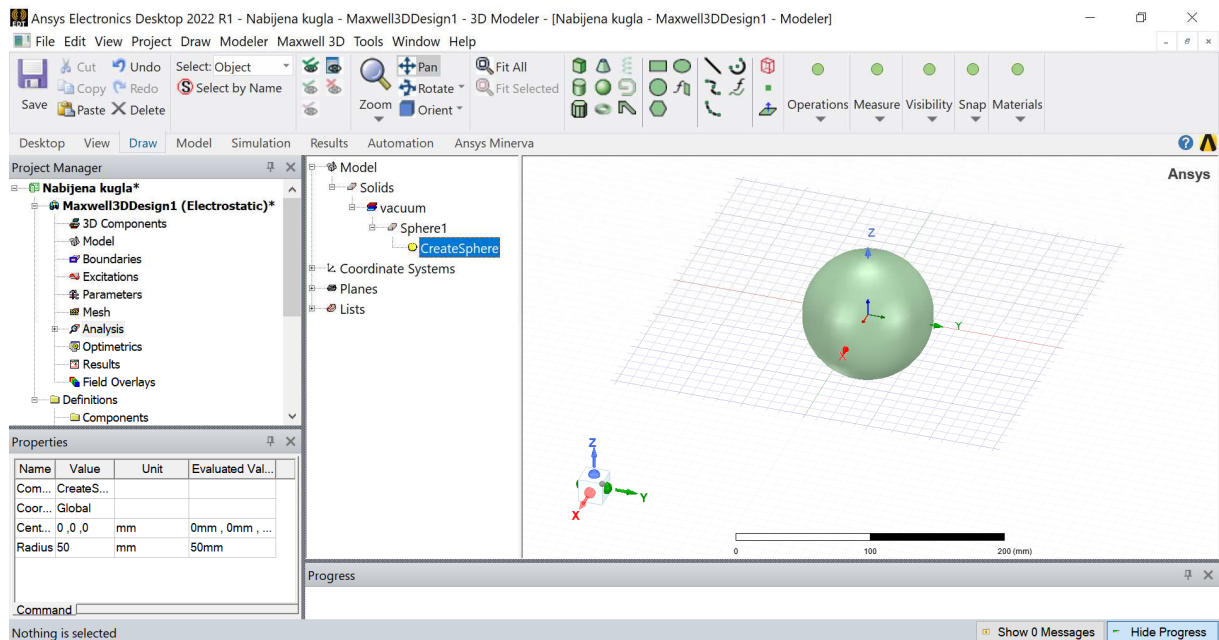
Nakon provedenih prethodno opisanih radnji, može se započeti s modeliranjem. Modeliranje se započinje crtanjem geometrije elektromagnetske zadaće. U ovom primjeru to je nabijena kugla. Izbor geometrijskog tijela kugle obavlja se klikom miša na ikonu kugle kojoj je položaj i izgled prikazan na slici 8.12. Nakon što je nacrtana kugla, glavni prozor ima izgled prikazan slikom 8.13. U polju „*Properties*“ mogu se promijeniti sve geometrijske veličine vezane uz nacrtanu kuglu (slika 8.13). Izgled polja „*Properties*“ nakon promijenjenih geometrijskih podataka nacrtane kugle prikazan je na slici 8.14.



Slika 8.12 Položaj i izgled ikone za izbor geometrijskog tijela kugle.



Slika 8.13 Izgled glavnog prozora nakon nacrtane kugle i polja „Properties“.

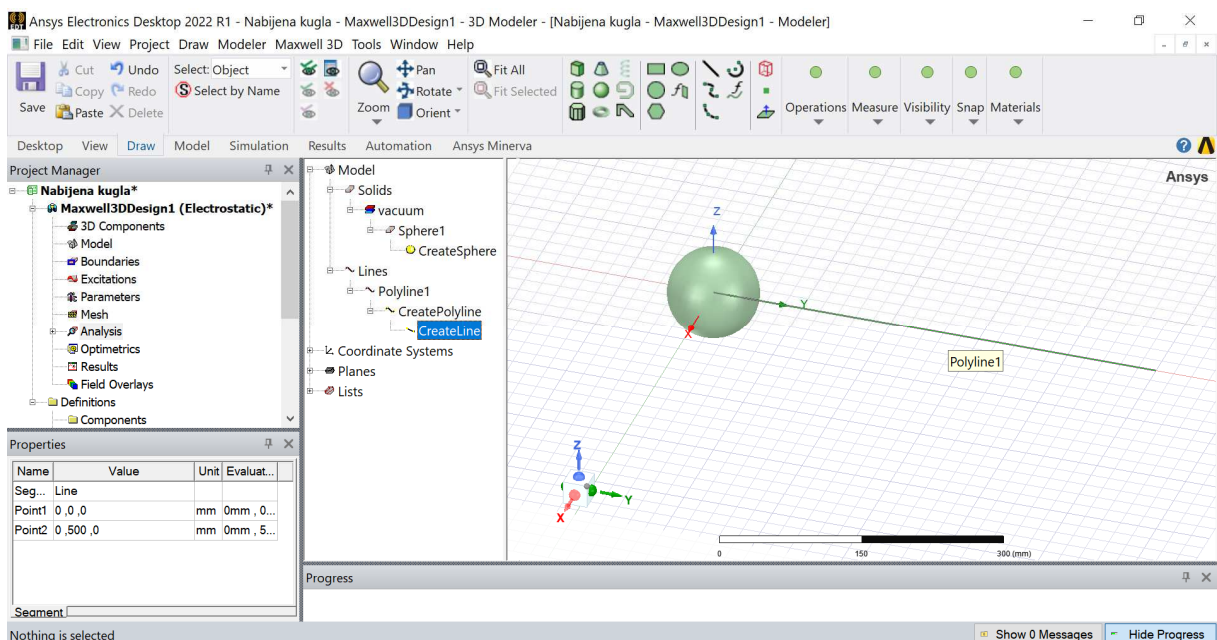


Slika 8.14 Izgled polja „Properties“ nakon promijenjenih geometrijskih podataka nacrtane kugle.

Jedan od načina na koji se rezultati mogu grafički predočiti jest korištenjem opcije „*Polyline*“. U kontekstu geometrije „*Polyline*“ se odnosi na jedan ili više, tj. niz povezanih ravnih segmenata koji čine jednu cjelinu. Položaj i izgled ikone opcije „*Polyline*“ prikazan je na slici 8.15. Nakon nacrtanog segmenta kojemu je početak u središtu kugle, a završetak izvan kugle ($x=0$, $y=500$ mm, $z=0$) glavni prozor poprima izgled prikazan na slici 8.16.

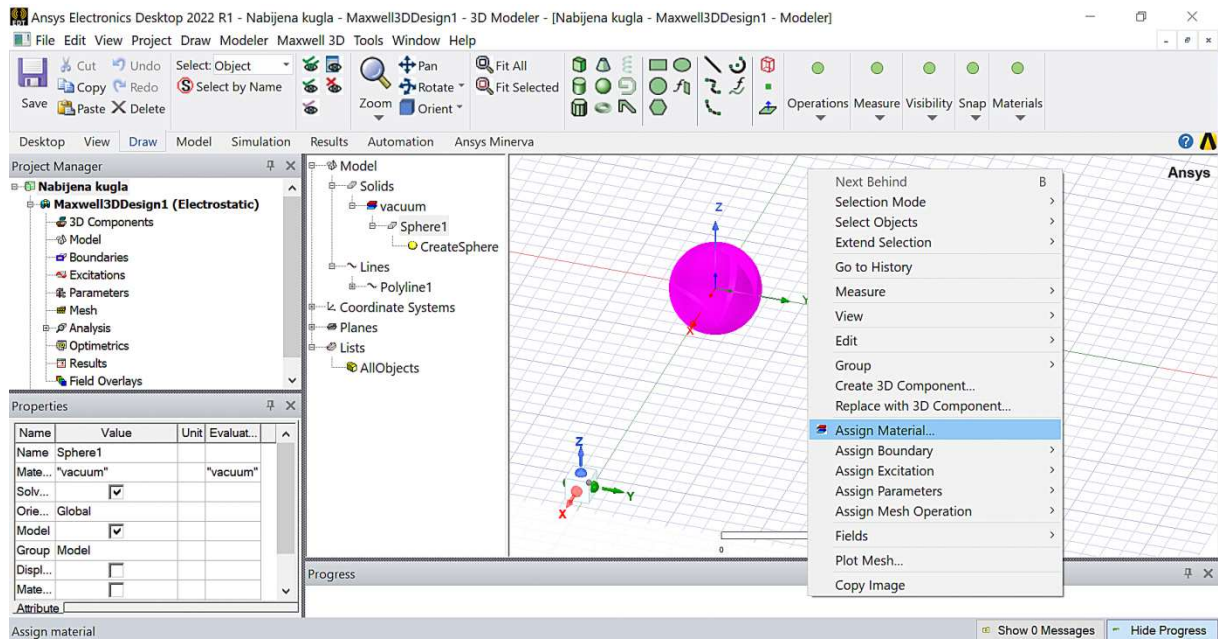


Slika 8.15 Položaj i izgled ikone opcije „*Polyline*“.

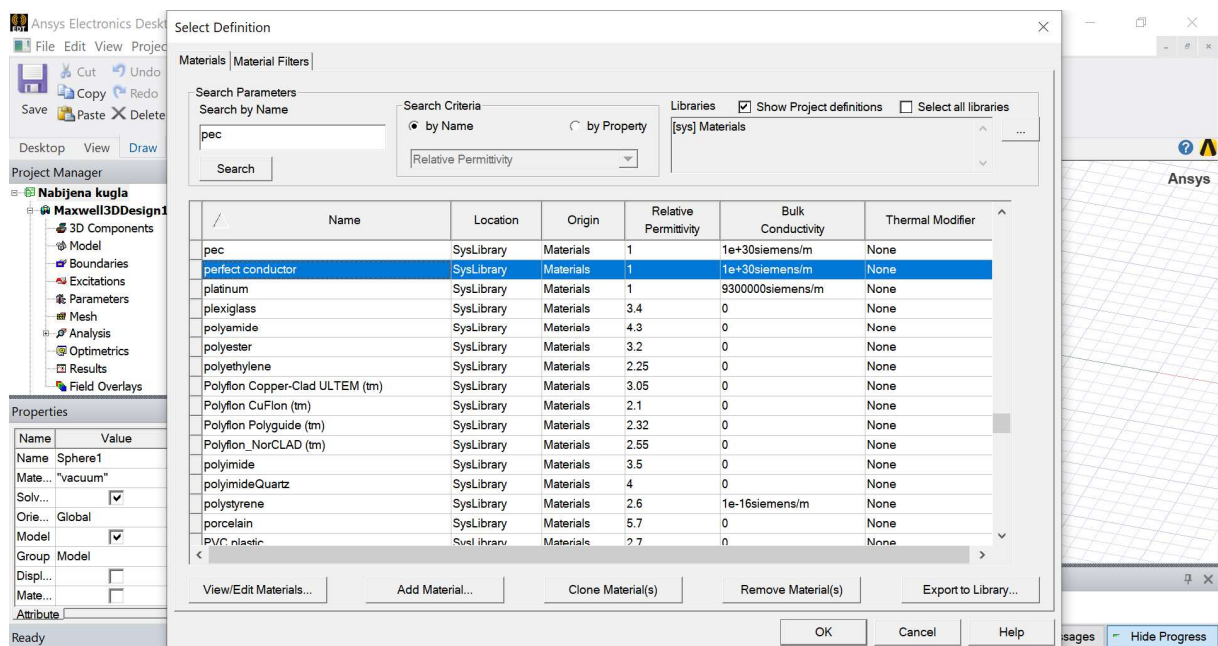


Slika 8.16 Glavni prozor nakon modelirane kugle i segmenta.

Nakon završetka crtanja geometrije, potrebno je geometrijskim tijelima pridružiti odgovarajuća fizikalna svojstva materijala od kojega su načinjena. Svojstva mnogih materijala nalaze se biblioteci materijala „*Materials Libraries*“. Stoga, umjesto ručnog unošenja svojstava materijala nacrtanih geometrijskih tijela, dovoljno je iz biblioteke materijala odabrati odgovarajući materijal i program Ansys automatski će povući relevantna svojstva materijala (u ovom slučaju električna). Desnim klikom miša na kuglu pojavljuje se izbornik prikazan na slici 8.17 u kojemu je potrebno odabrati opciju „*Assign Material*“. Nakon izbora opcije „*Assign Material*“ pojavljuje se prozor za izbor materijala kao što je prikazano na slici 8.18. U ovom primjeru odabran je savršeni električni vodič (engl. *Perfect electric conductor* (PEC)).

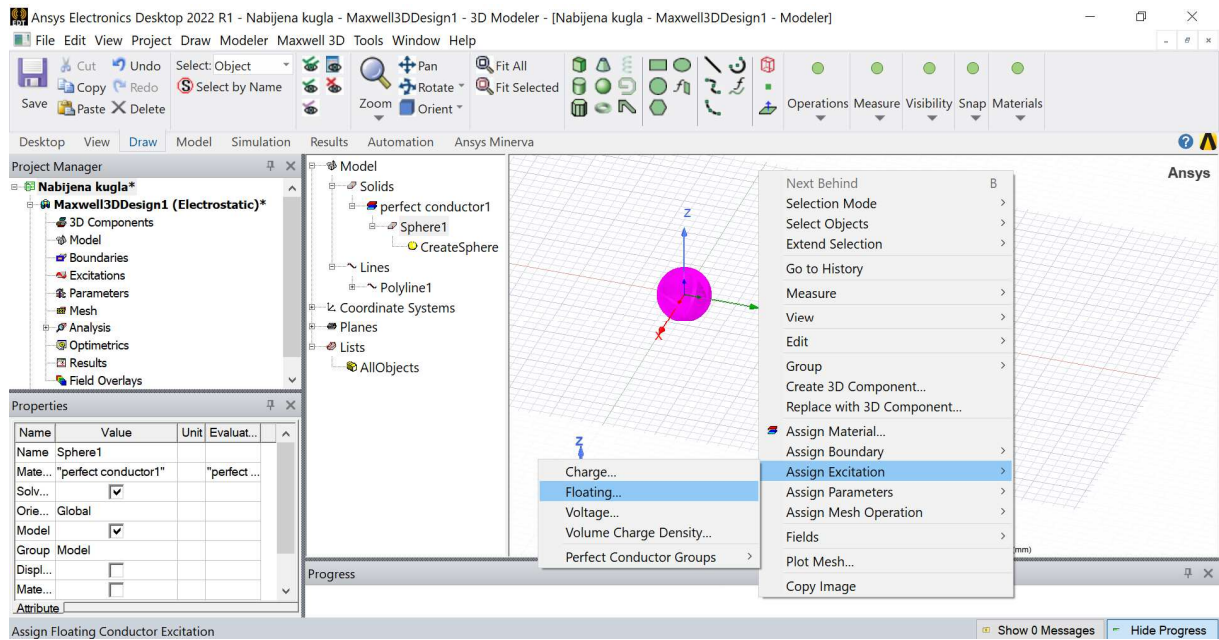


Slika 8.17 Izbor opcije „Assign Material“ za pridruživanje materijala kugli.

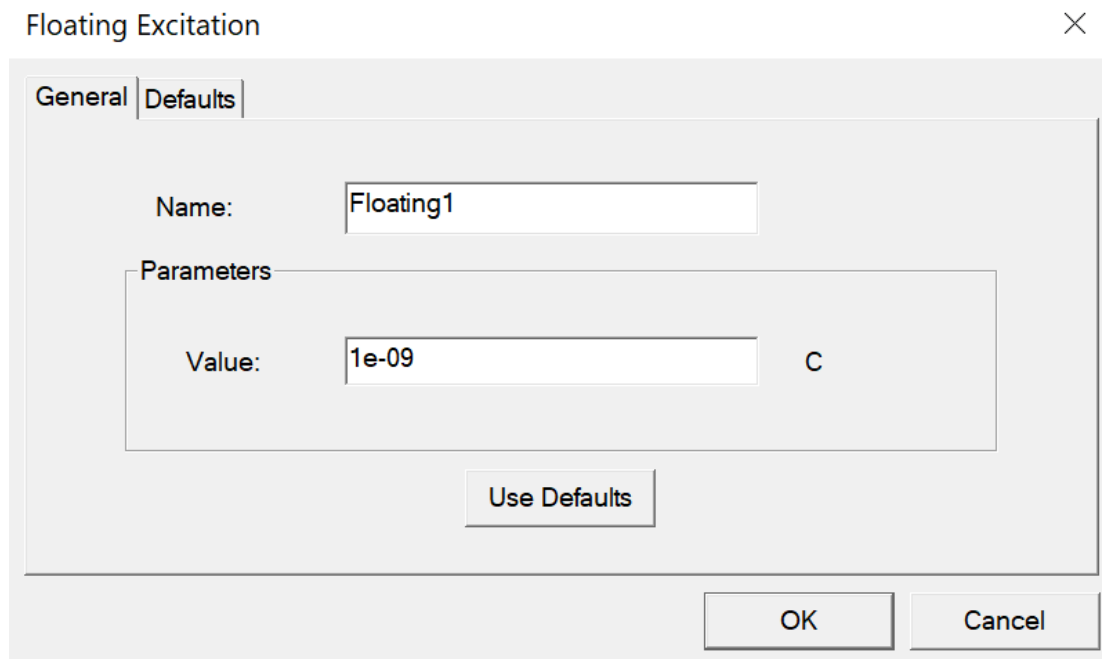


Slika 8.18 Izbor materijala pod nazivom „Perfect electric conductor“.

Nakon izbora materijala od kojeg je načinjena kugla potrebno je načiniti odgovarajuću pobudu analizirane elektromagnetske zadaće. Pridruživanje odgovarajuće pobude obavlja se prvo izborom geometrijskog lijevim klikom miša, a nakon toga, nakon desnog klika miša, pojavljuje se izbornik u kojemu je potrebno odabrati opciju „Assign Excitation“ (slika 8.19).



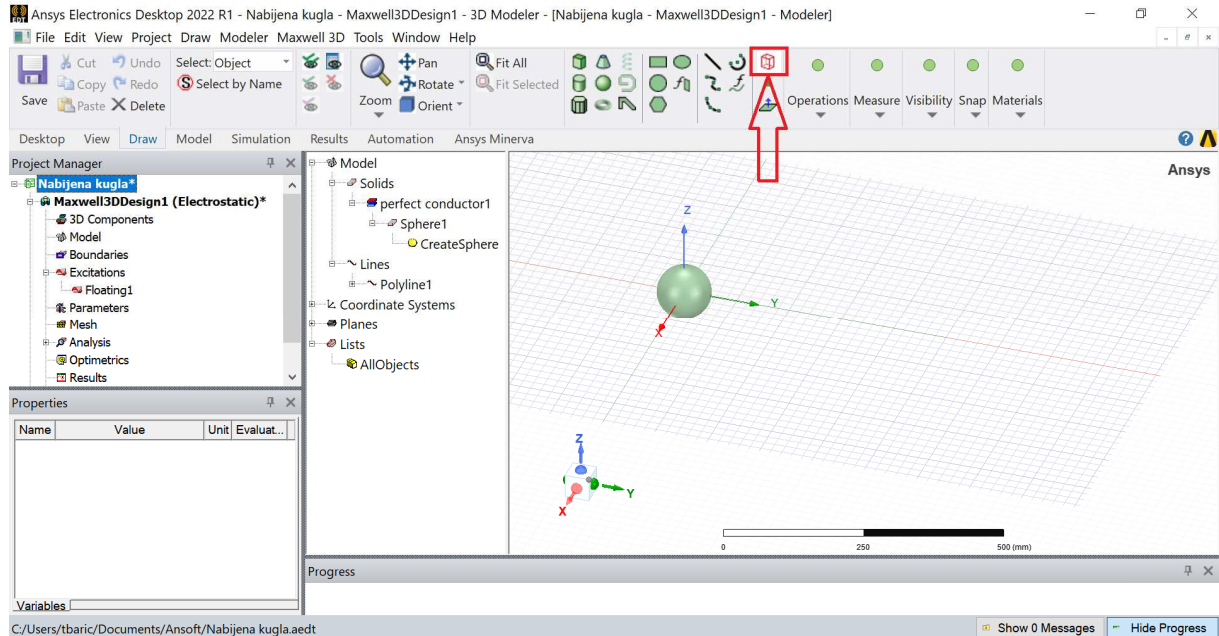
Slika 8.19 Pridruživanje pobude sustava (kugle) „Assign Excitation“.



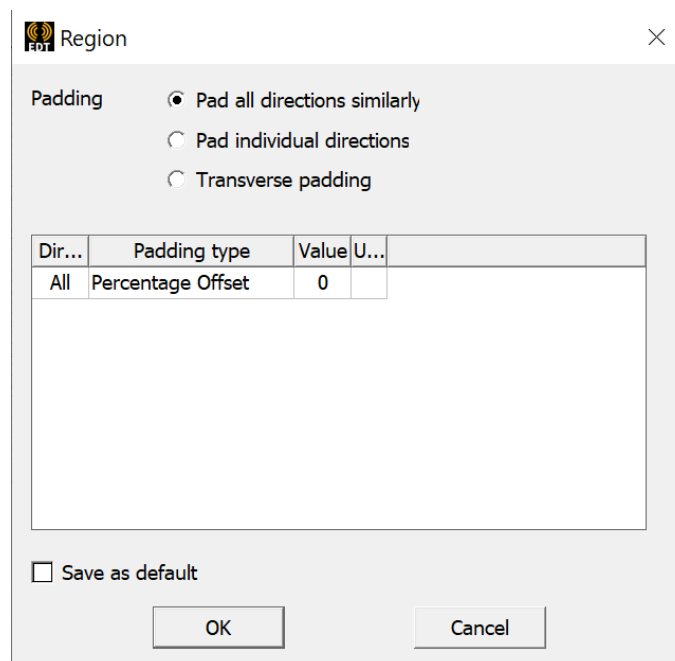
Slika 8.20 Vrijednost naboja kojom je nabijena kugla.

Nakon postavljanja pobude sustava (kugle) potrebno je definirati prostor u kojemu će se odvijati numerički proračun (engl. *Computation domain*) primjenom metode konačnih elemenata (MKE). U programskom paketu Ansys to se postiže klikom na ikonu pod nazivom „Region“.

Izgled i položaj ikone naziva „Region“ prikazan je slikom 8.21. Nakon klika na ikonu pod nazivom „Region“ pojavljuje se prozor za unos podataka o dimenzijama područja u kojemu će se odvijati proračun što je prikazano slikom 8.22.

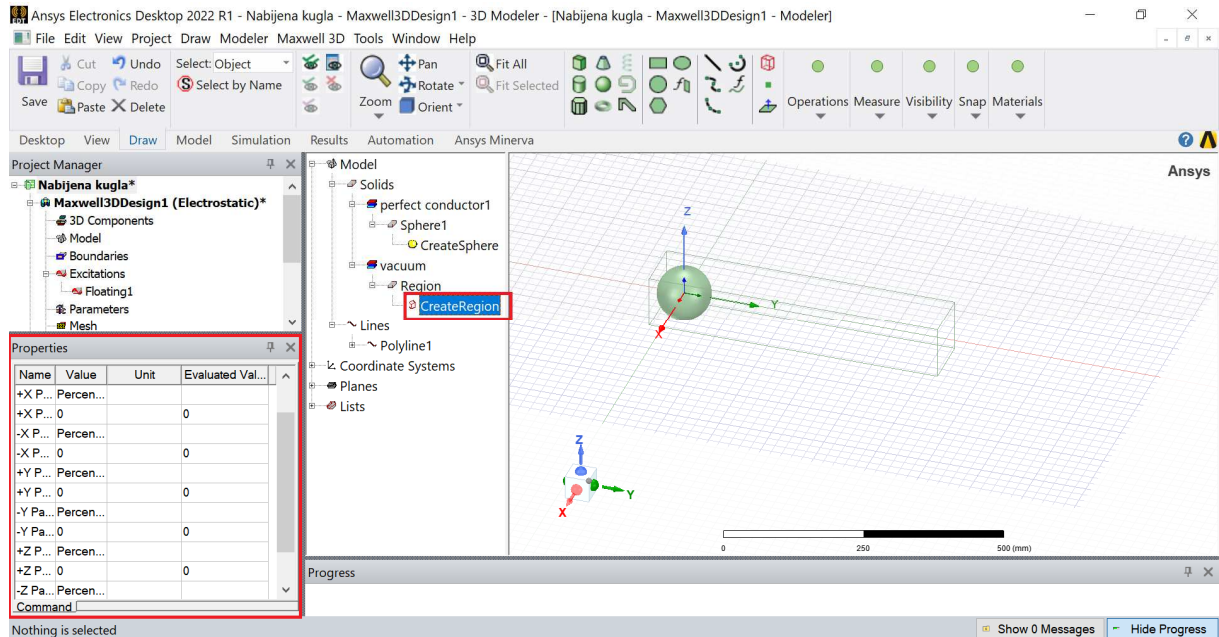


Slika 8.21 Izgled i položaj ikone „Region“.

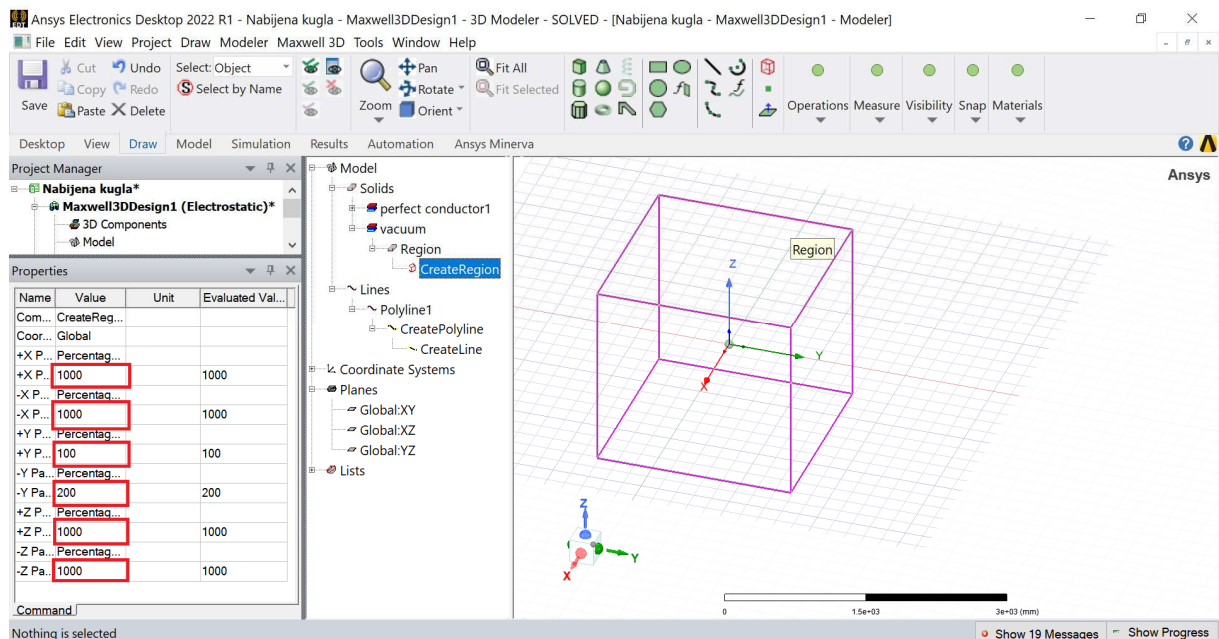


Slika 8.22 Prozor za postavljanje podataka o dimenzijama područja u kojemu će se odvijati numerički proračun.

Ukoliko se u prethodnom koraku potvrdi unaprijed definirane dimenzije regije „Region“, i dalje je moguća njihova naknadna promjena, što se postiže klikom miša na „Region“ u polju modela, što je prikazano slikom 8.23. Klikom miša na „Region“ u polju modela, u donjem lijevom kutu glavnog prozora pojavljuje se polje pod nazivom „Properties“ s podacima o prostornim dimenzijama regije „Region“ koje se mogu promijeniti (slika 8.23). Promijenjene dimenzije regije „Region“ prikazane su na slici 8.24.

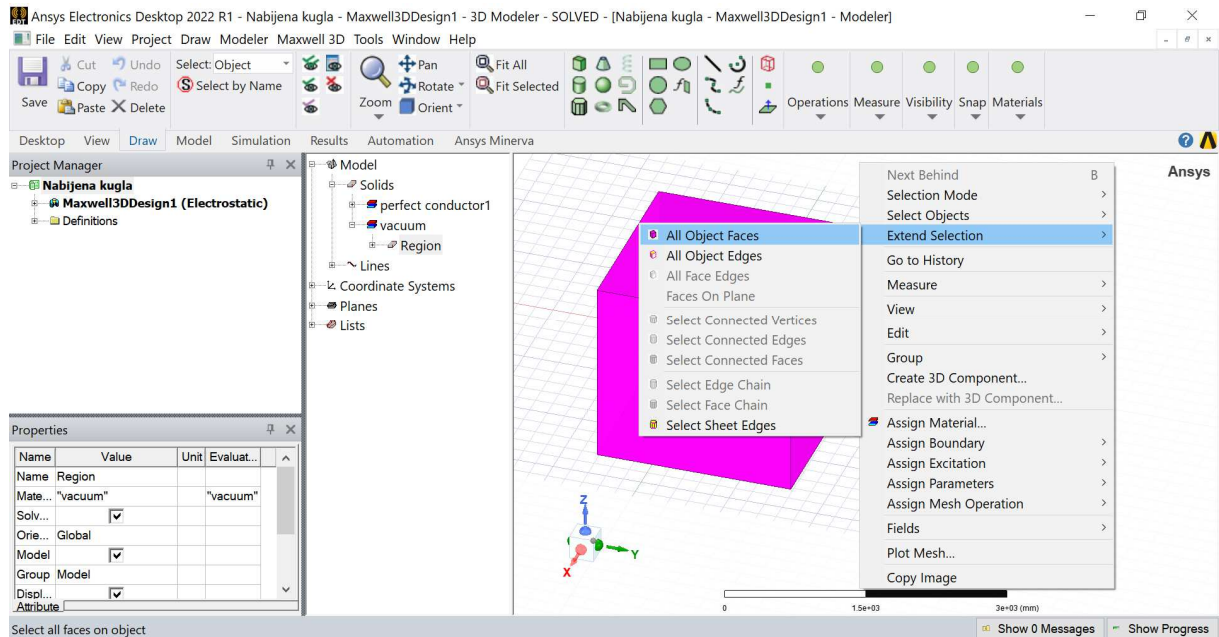


Slika 8.23 Položaj polja „Properties“ s inicijalnim dimenzijama regije „Region“.

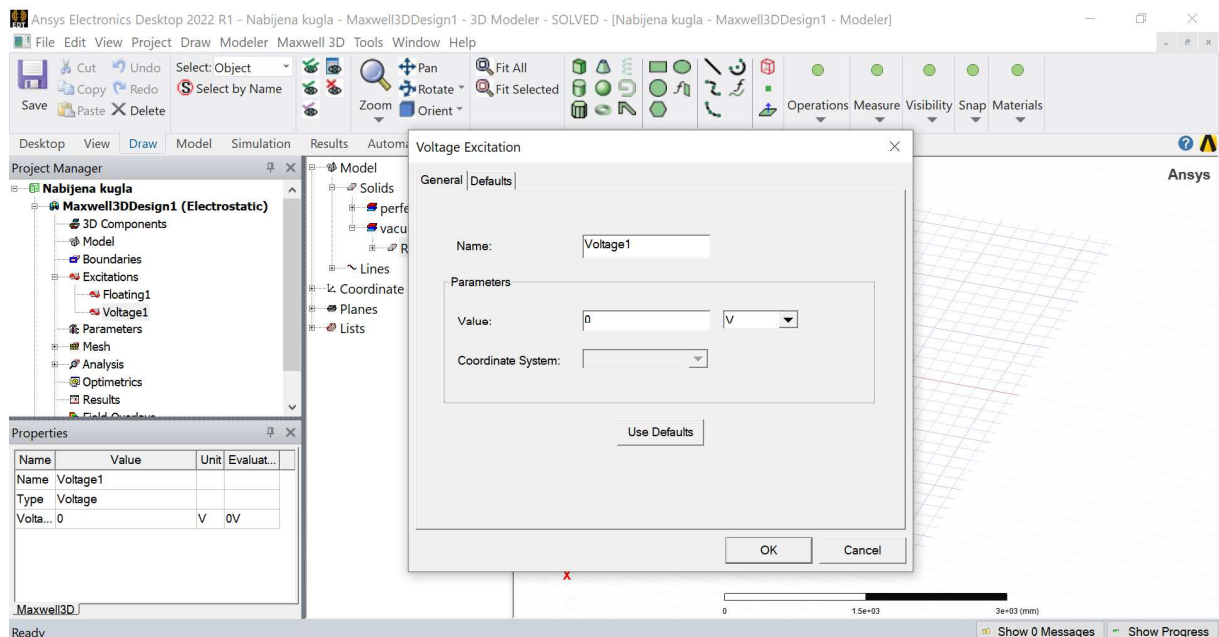


Slika 8.24 Promijenjene dimenzije regije „Region“ u polju „Properties“.

Po završetku definiranja dimenzija regije može se pristupiti pridruživanju potencijala na kojima se nalaze sve stranice kvadra kojima je definirana regija. U tu svrhu, nakon što se klikne na regiju, treba odabrati opciju „Extend Selection“ i podopciju „All Object Faces“ kao što je to prikazano slikom 8.25. Nakon navedenog otvara se prozor prikazan slikom 8.26 u kojemu se zadaje potencijal na kojemu se nalaze sve stranice kvadra kojom je zadana regija.

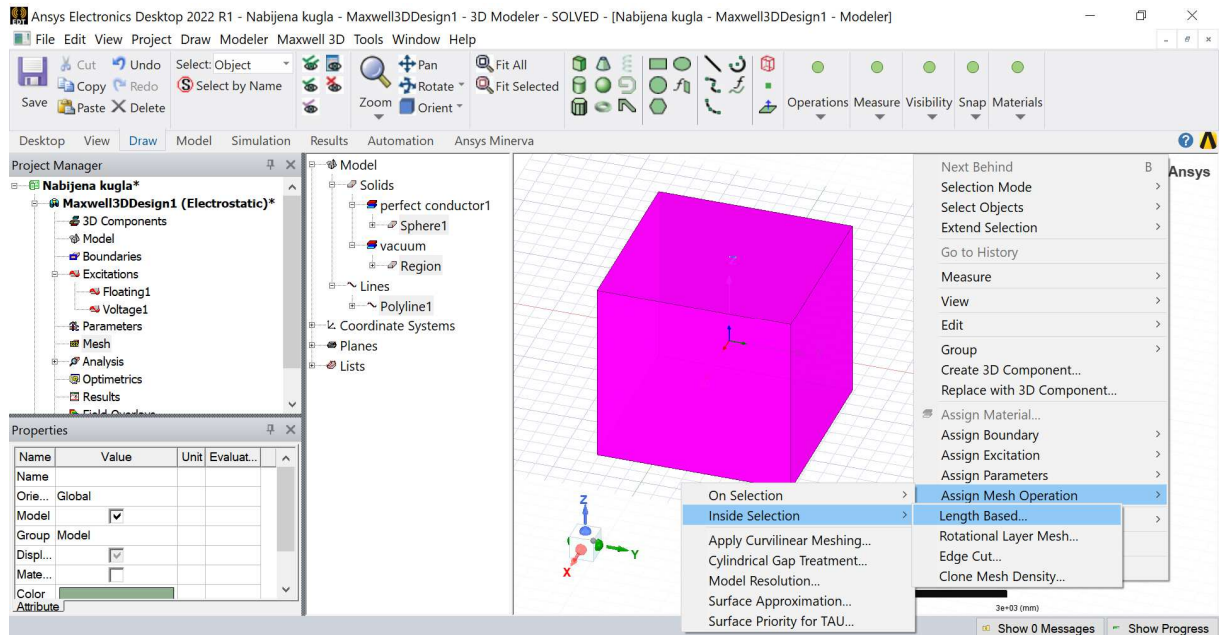


Slika 8.25 Izbor regije i promjena načina selekcije na sva lica kvadra kojom je zadana regija.

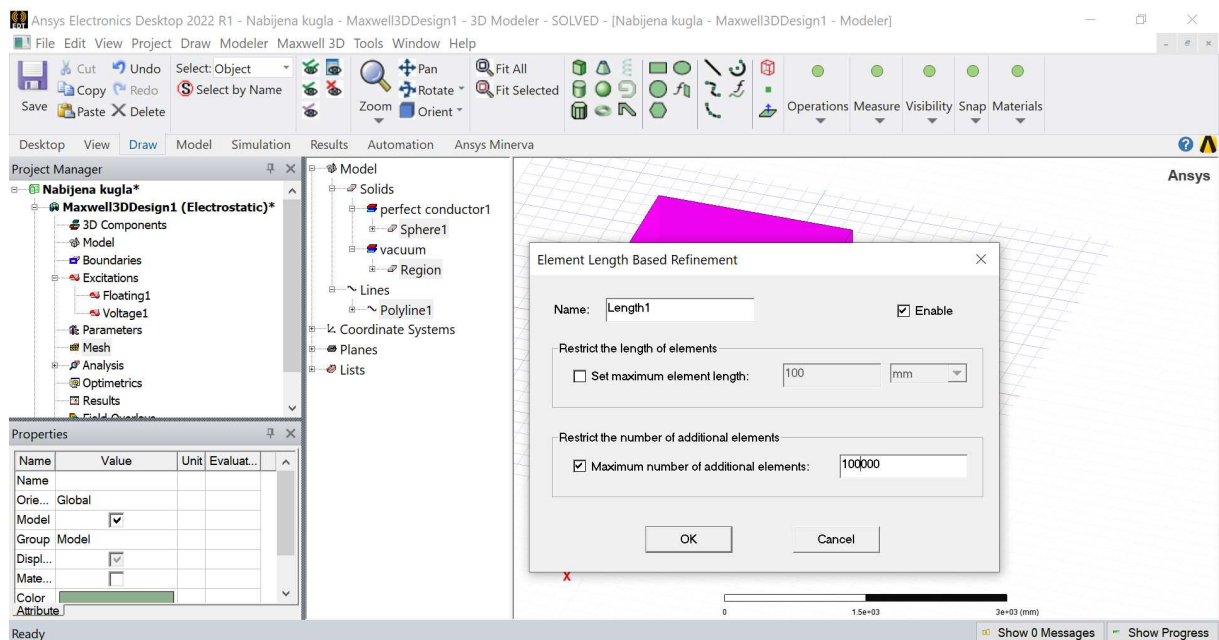


Slika 8.26 Pridruživanje iznosa napona svim stranicama kvadra kojom je zadana regija.

Slijedi definiranje postupka i načina kreiranja mreže konačnih elemenata. Kako bi se odabrala geometrijska tijela koja će biti segmentirana potrebno je promijeniti način selekcije „*Selection Mode*“ u objekte i mišem odabrati kuglu i regiju. Zatim, nakon desnog klika miša, potrebno je odabrati opciju „*Assign Mesh Operation*“ i podopciju „*Inside Selection*“ kao što je prikazano slikom 8.27. Nakon provedbe prethodnih radnji otvara se prozor u kojemu se može definirati maksimalna duljina elemenata i ograničiti broj elemenata. U ovom primjeru odabrane su vrijednosti kao što je prikazano slikom 8.28.

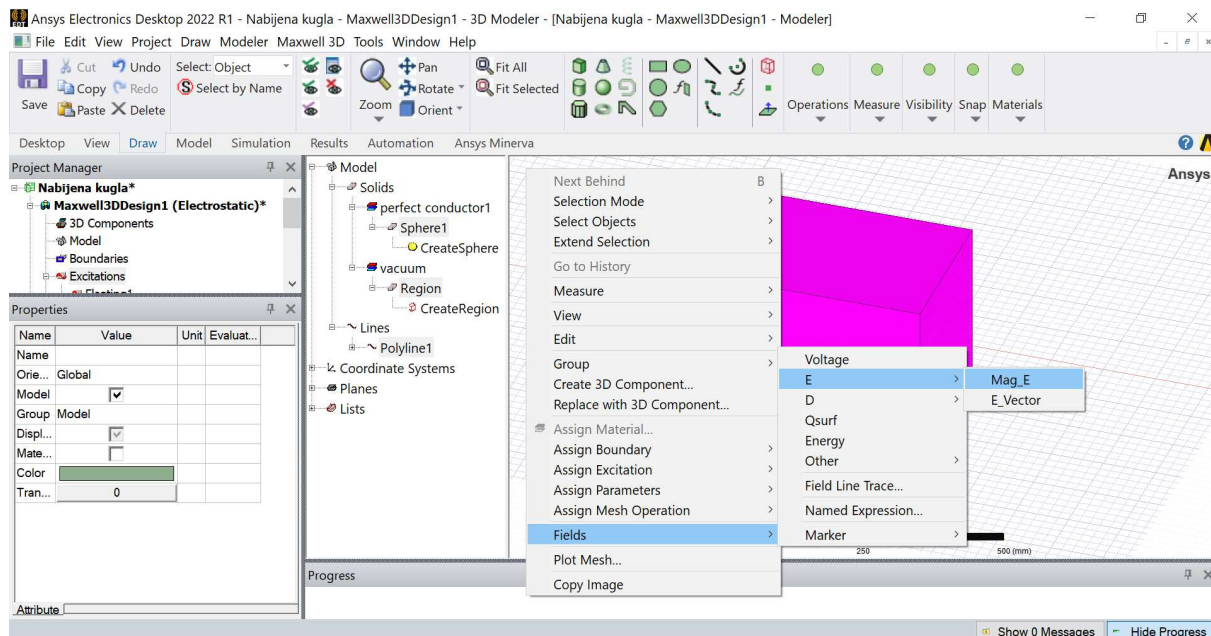


Slika 8.27 Izbor kugle, regije, postupka i načina kreiranja mreže konačnih elemenata.

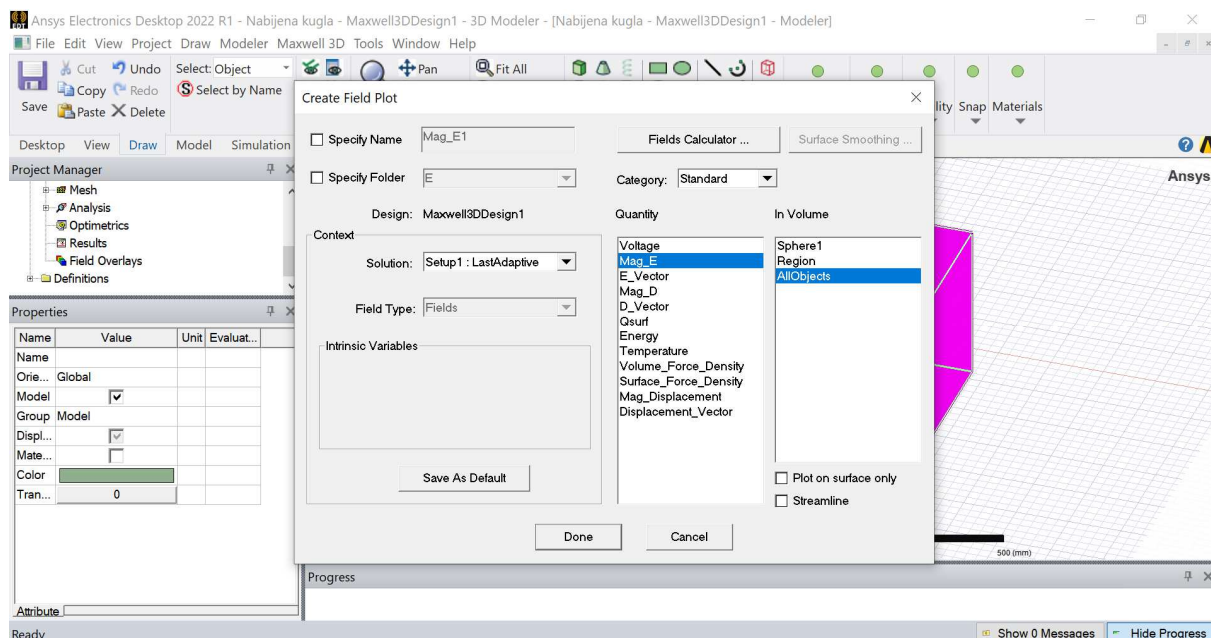


Slika 8.28 Zadavanje maksimalnog broja dodatnih elemenata.

Kako bi se zadalo da se električno polje i potencijal izračunava u prostoru unutar regije (engl. *Region*), mišem je potrebno prvo odabrati prostor unutar regije, a nakon desnog klika miša, otvara se izbornik u kojemu je potrebno odabrati opciju „Fields“ te zatim opciju „E“ kako je prikazano slikom 8.29. Nakon navedenog otvara se prozor u kojemu je potrebno odabrati stavke kao na slici 8.30 kojima se zadaju parametri grafičkog prikaza.

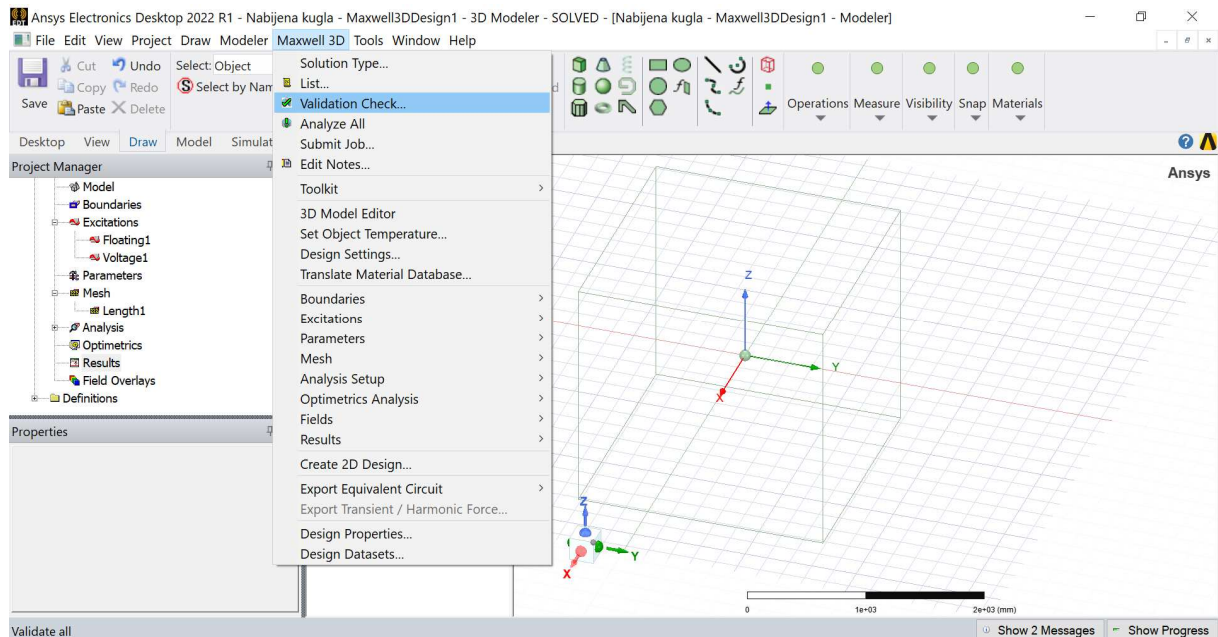


Slika 8.29 Izbor električnog polja za proračun u prostoru regije.

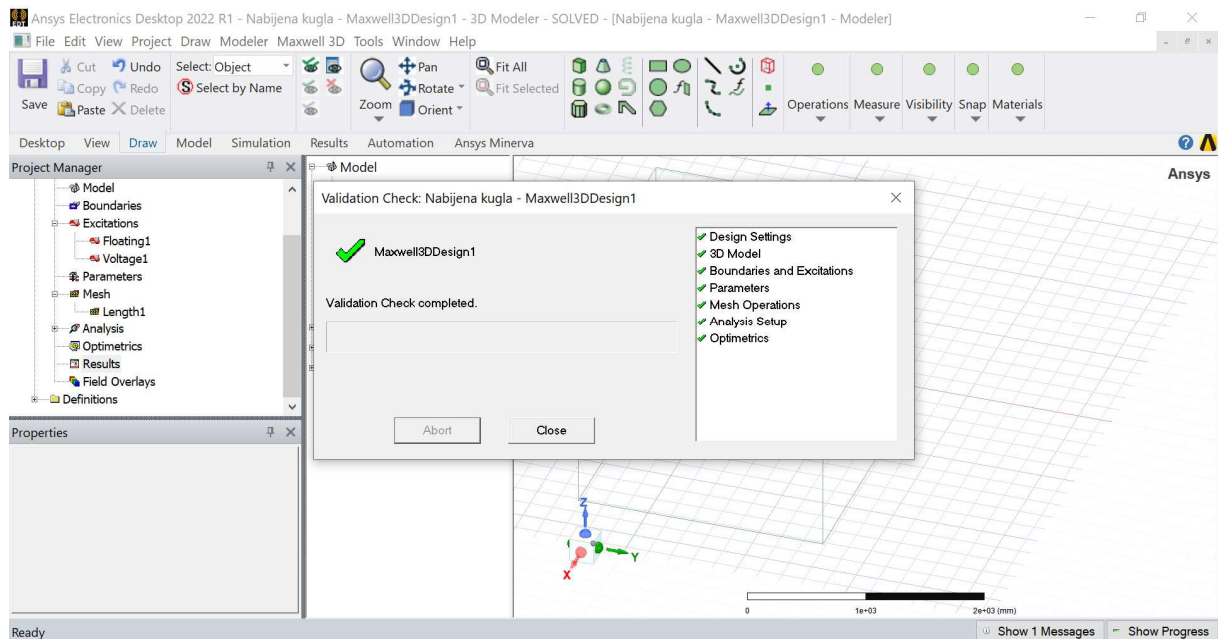


Slika 8.30 Zadavanje parametara grafičkog prikaza električnog polja.

Po završetku zadavanja svih relevantnih postavki modela, parametara, mreže konačnih elemenata i numeričkog proračuna, valjanost prethodnih može se provjeriti korištenjem automatiziranog procesa pod nazivom „*Validation Check*“ kako je to prikazano slikom 8.31. Nakon klika na opciju „*Validation Check*“ program provjerava valjanost svih navedenih postavki te, ukoliko su one valjane, pojavljuje se zelena kvačica pored svake od njih kako je to prikazano slikom 8.32.

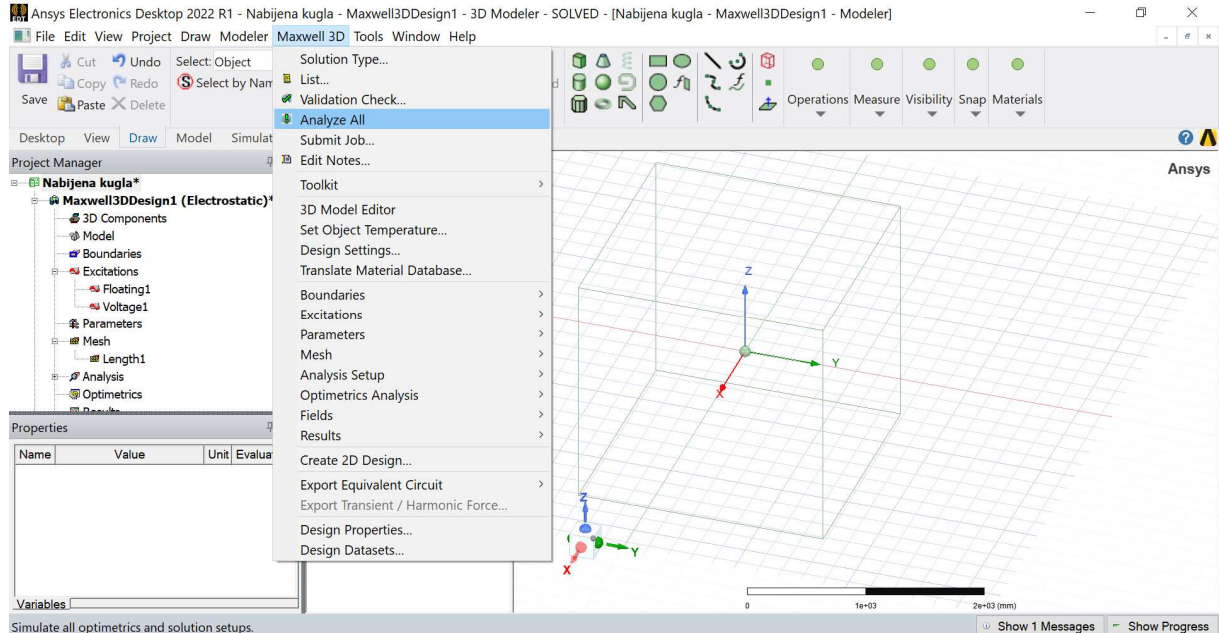


Slika 8.31 Izbor opcije za provjeru svih postavki vezanih uz model.

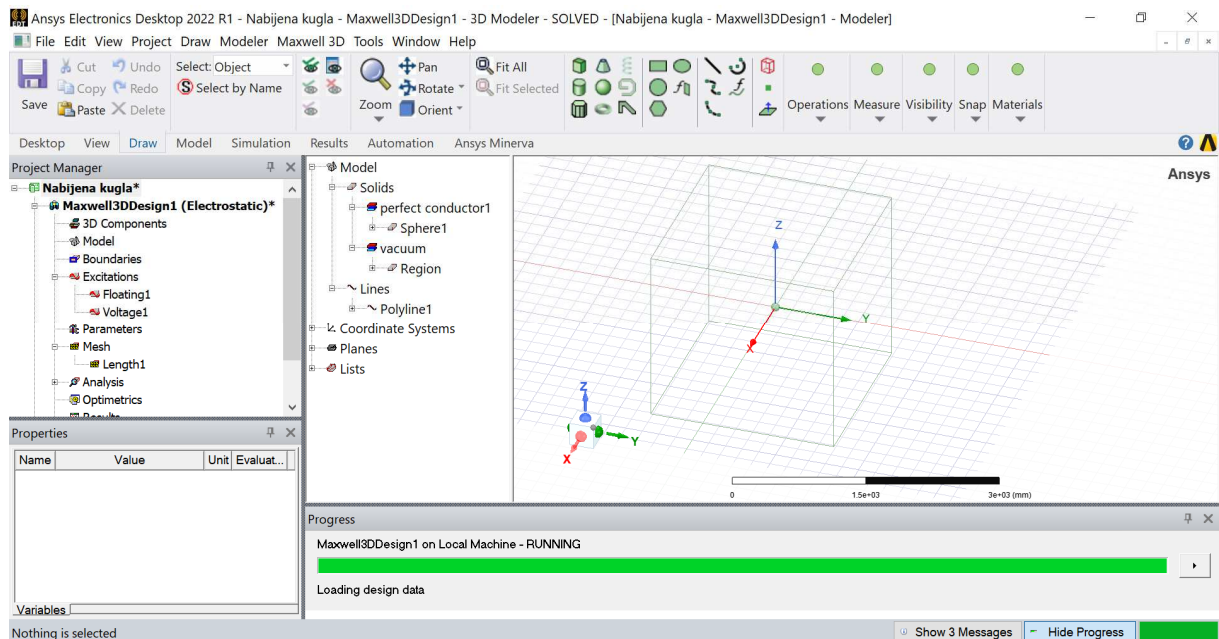


Slika 8.32 Izvještaj nakon provjere svih postavki vezanih uz model.

Ukoliko su u izvještaju nakon provjere svih postavki vezanih uz model zelene kvačice, tada nisu potrebne nikakve korekcije i može se programu zadati da započne proces numeričkog proračuna. Zadavanje naredbe za numerički proračun obavlja se izborom opcije „Analyze All“ kao što je prikazano slikom 8.33. Nakon što se klikne na opciju „Analyze All“ započinje proces numeričkog proračuna kojemu se napredak može pratiti u polju „Progress“ kao što je prikazano slikom 8.34.

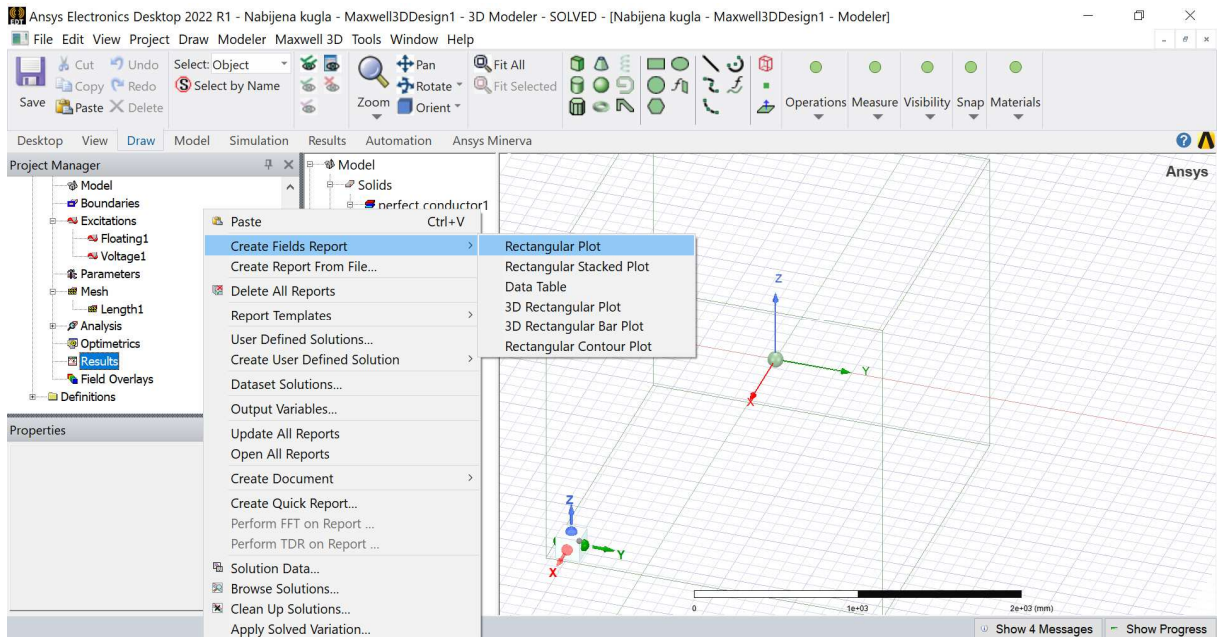


Slika 8.33 Izbor opcije „Analyze All“.

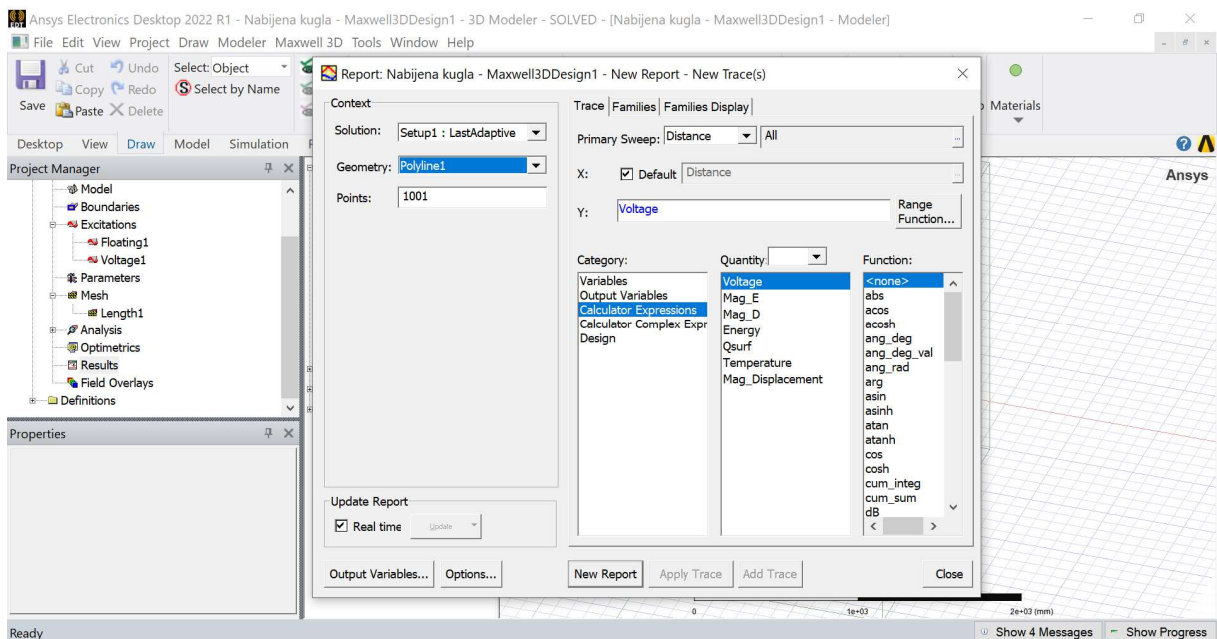


Slika 8.34 Grafičko predstavljanje „Progress Bar“ stupnja izvršenosti proračuna.

Nakon završetka proračuna može se pristupiti izračunatim vrijednostima fizikalnih veličina. U ovom primjeru bit će pokazano grafičko predočavanje izračunatih fizikalnih veličina (napona i jakosti električnog polja). Jedan je od načina grafičkog prikazivanja izračunatih fizikalnih veličina korištenje opcije „*Create Fields Report*“ i podopcije „*Rectangular Plot*“ kako je to prikazano slikom 8.35. Nakon izbora prethodno navedenih opcija otvara se prozor u kojemu je potrebno odabrati fizikalnu veličinu za koju se želi grafički prikaz. U ovom primjeru potrebno je postaviti izbor na način kako je to prikazano slikom 8.36.

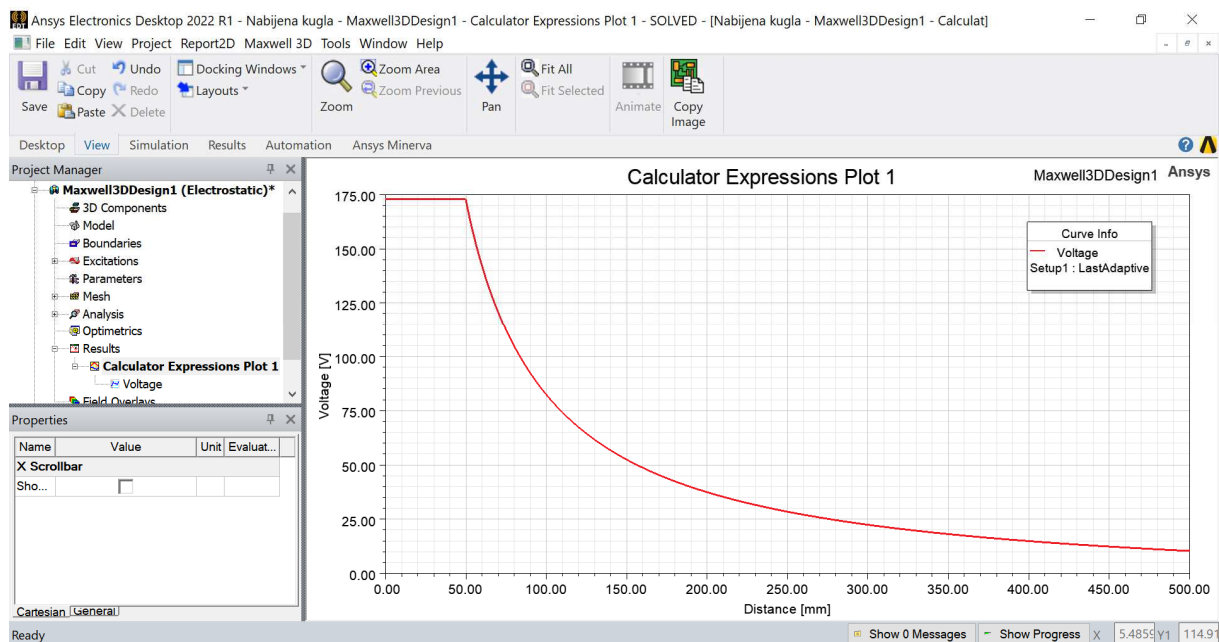


Slika 8.35 Izbor opcija „*Create Fields Report*“ i „*Rectangular Plot*“.

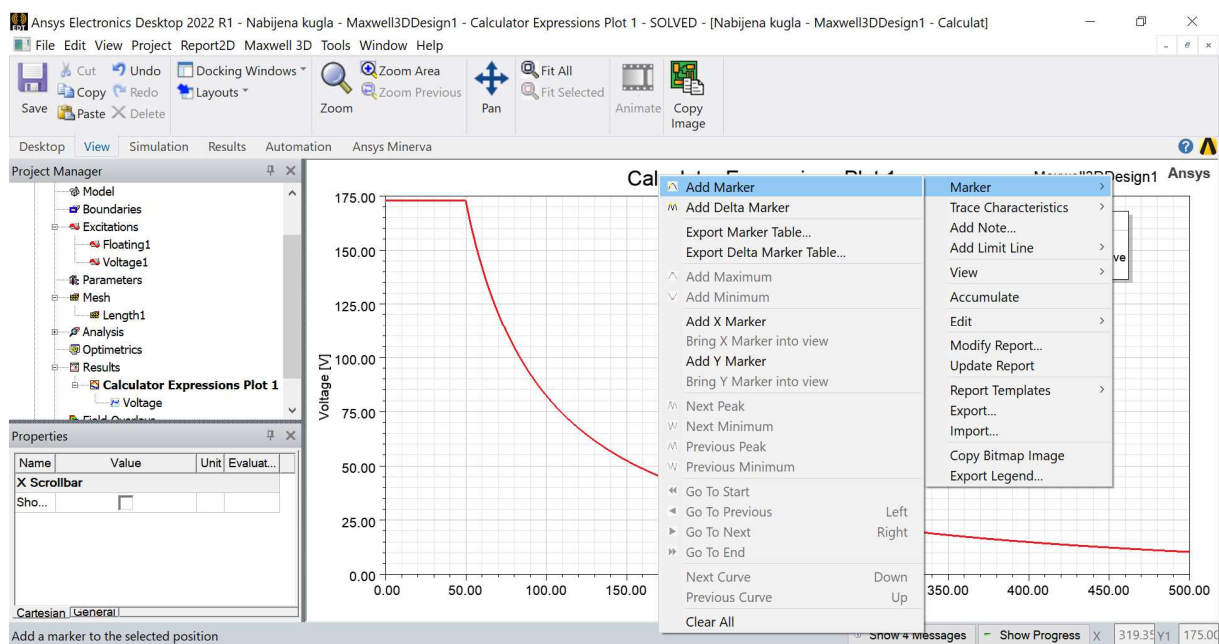


Slika 8.36 Izbor napona za grafičko prikazivanje duž segmenta pravca naziva „*Polyline1*“.

Nakon klika na gumb pod nazivom „*New Report*“ pojavljuje se grafički prikaz napona duž segmenta pravca naziva „*Polyline1*“ (slika 8.37), što odgovara promjeni napona u funkciji udaljenosti od središta nabijene kugle. Obično je pogodno točnije poznavati brojčanu vrijednost napona na određenim pozicijama, što se postiže upotrebom markera. Desnim klikom miša na području grafa otvara se izbornik prikazan slikom 8.38 u kojemu je potrebno odabrati opciju „*Add Marker*“, a zatim podopciju „*Marker*“.

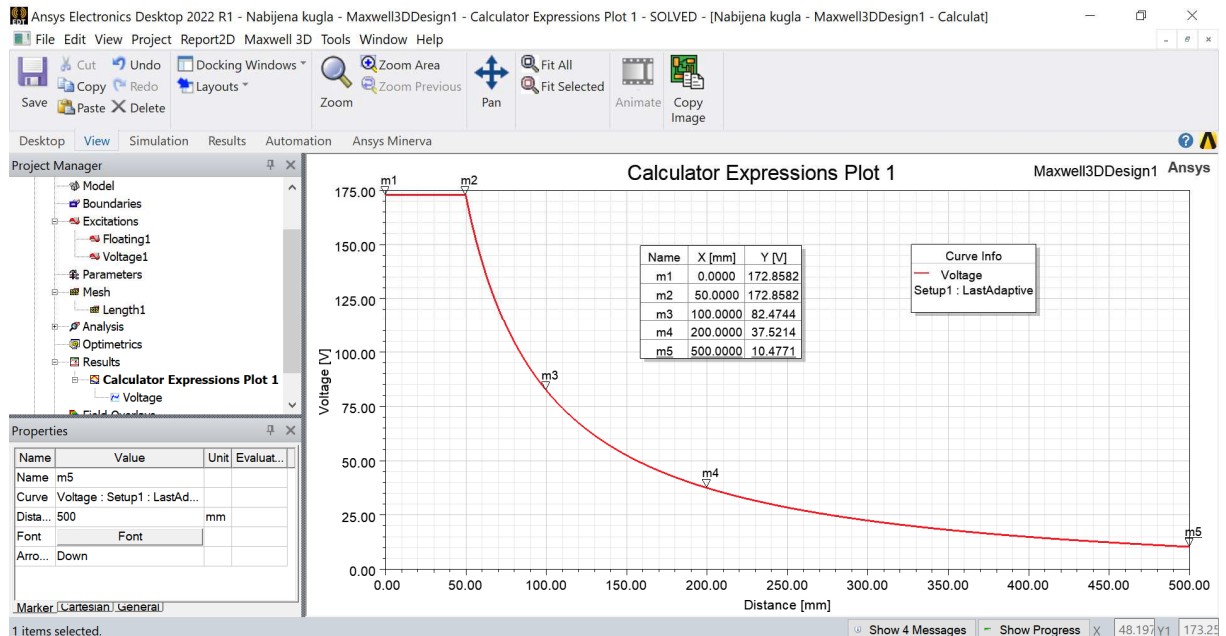


Slika 8.37 Napon u funkciji udaljenosti od središta nabijene kugle.

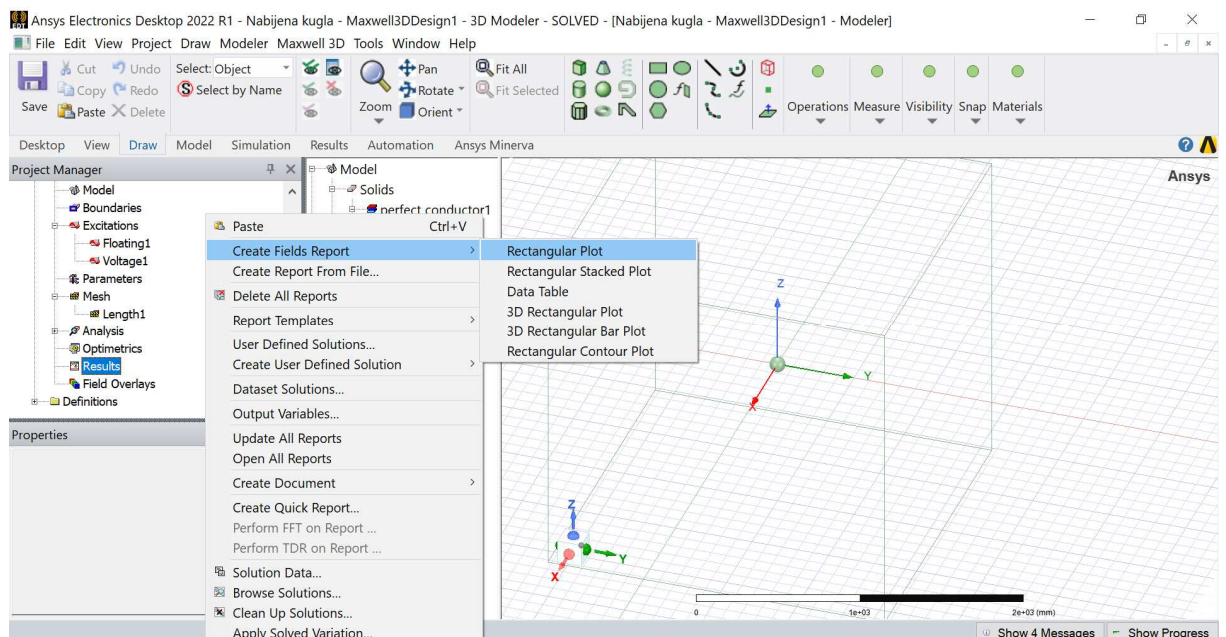


Slika 8.38 Izbor opcije „*Add Marker*“ i podopcije „*Marker*“.

Nakon provedbe opisanih radnji, na grafičkom prikazu ovisnosti napona o udaljenosti od središta nabijene kugle pojavljuje se tablica s brojevanim iznosima napona na pozicijama na kojima su postavljeni markeri kao što je to prikazano slikom 8.39. Do grafičkog prikaza električnog polja u funkciji udaljenosti od središta nabijene kugle dolazi se klikom na opciju „Results“ u polju „Projekt Manager“ nakon čega se otvara izbornik u kojemu je potrebno odabrati opcije „Create Fields Report“ i „Rectangular Plot“ kao što je prikazano na slici 8.40.

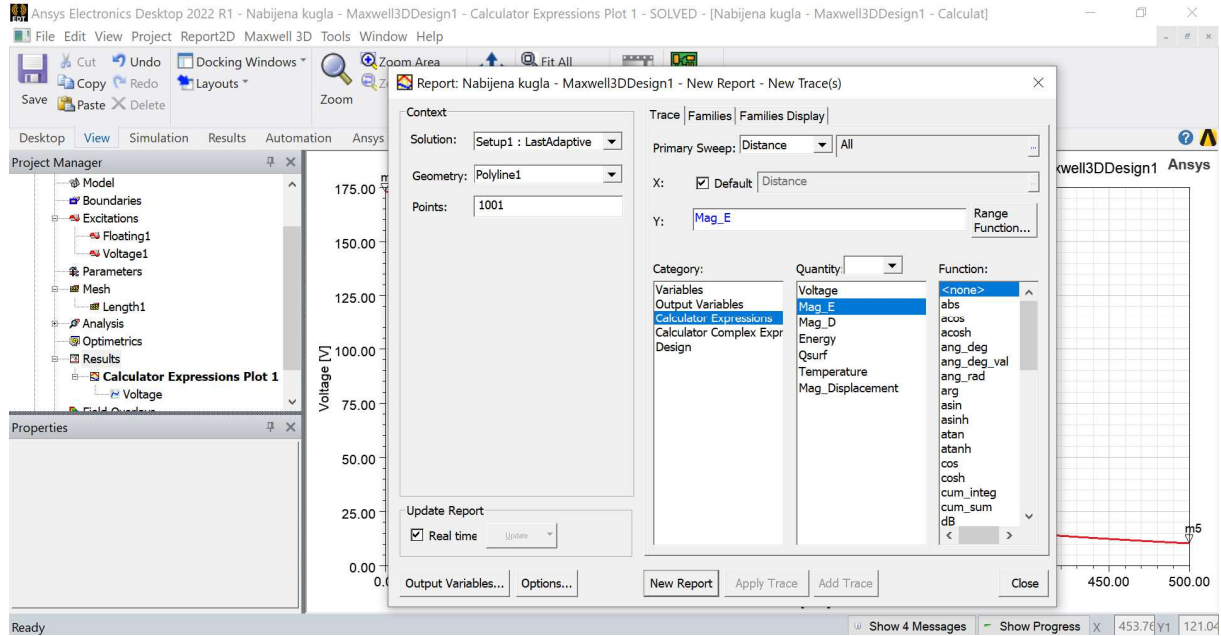


Slika 8.39 Napon u funkciji udaljenosti od središta nabijene kugle i tablični prikaz brojevanih vrijednosti napona na pozicijama na kojima su postavljeni markeri.

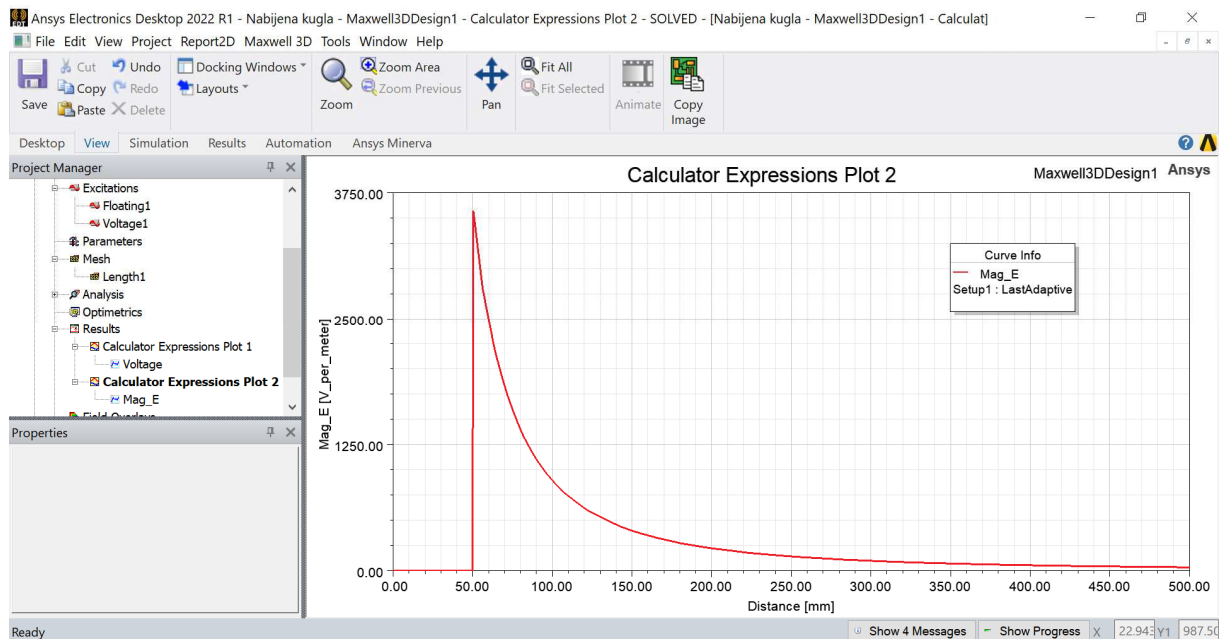


Slika 8.40 Izbor opcija „Create Fields Report“ i „Rectangular Plot“.

Nakon izbora podopcije „*Rectangular Plot*“ otvara se prozor prikazan slikom 8.41. u kojemu je potrebno odabrati fizikalnu veličinu za koju se želi grafički prikaz (električno polje) i geometriju duž koje se želi njezin prikaz (segment pravca naziva „*Polyline1*“). Odabrati opcije kao što je prikazano slikom 8.41. Nakon klika na gumb pod nazivom „*New Report*“ pojavljuje se grafički prikaz električnog polja duž segmenta pravca naziva „*Polyline1*“ (slika 8.42), što odgovara promjeni el. polja u funkciji udaljenosti od središta nabijene kugle.

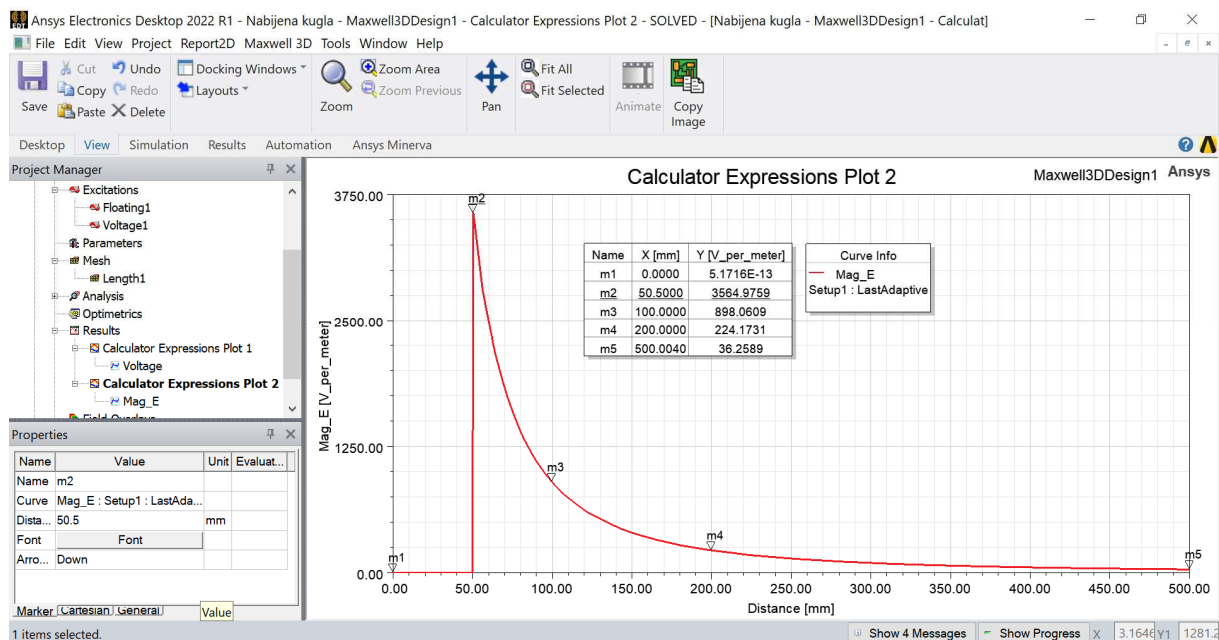


Slika 8.41 Izbor električnog polja za grafičko prikazivanje duž segmenta pravca naziva „*Polyline1*“.



Slika 8.42 Električno polje u funkciji udaljenosti od središta nabijene kugle.

Tablični prikaz brojeanih vrijednosti električnog polja na pozicijama na kojima su postavljeni markeri dobiva se postupkom koji je opisan za tablično prikazivanje napona. Za primjer, neka su odabrane iste pozicije kao i za napon, odnosno udaljenosti od središta kugle na kojima se želi znati točnija brojčana vrijednost električnog polja. Tada se na grafičkom prikazu pojavljuje tablični prikaz brojeanih vrijednosti električnog polja na pozicijama na kojima su postavljeni markeri kao što je prikazano slikom 8.43.



Slika 8.43 Električno polje u funkciji udaljenosti od središta nabijene kugle i tablični prikaz brojeanih vrijednosti električnog polja na pozicijama na kojima su postavljeni markeri.

Analiza rezultata

Valjanost dobivenih rezultata numeričkog proračuna može se lako provjeriti upotrebom teorije iznesene u teorijskom dijelu ovog priručnika. Skalarni električni potencijal i električno polje u okolišu metalne nabijene kugle dani su izrazima:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}, & 0 \leq r \leq R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, & r \geq R. \end{cases} \quad (8-1)$$

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}, & r = R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, & r \geq R. \end{cases} \quad (8-2)$$

Uvrštavanjem brojčanih vrijednosti $q = 1 \text{ nC} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, $R = 50 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, dobiva se:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} = 8,992 \cdot 10^9 \approx 9 \cdot 10^9 \quad (8-3)$$

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} = 9 \cdot 10^9 \frac{1 \cdot 10^{-9}}{50 \cdot 10^{-3}} = \frac{9}{50} \cdot 10^3 = 0,18 \cdot 10^3 = 180 \text{ V} \quad (8-4)$$

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{1 \cdot 10^{-9}}{(50 \cdot 10^{-3})^2} = \frac{9}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 3600 \text{ V/m} \quad (8-5)$$

Koristeći se dobivenim brojčanim vrijednostima mogu se, za ovaj konkretni slučaj, napisati izrazi za skalarni električni potencijal i električno polje:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 180 \text{ V}, & 0 \leq r \leq R, \\ \frac{9}{r}, & r \geq R. \end{cases} \quad (8-6)$$

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq R, \\ 3600 \text{ V/m}, & r = R, \\ \frac{9}{r^2}, & r \geq R. \end{cases} \quad (8-7)$$

Koristeći se prethodnim dvama izrazima dobivene su brojčane vrijednosti skalarnog električnog potencijala i jakosti električnog polja koje su sažete u tablici 8.1. Ujedno, u tablici 8.1 dane su i numeričke vrijednosti skalarnog električnog potencijala i jakosti električnog polja dobivene numeričkim proračunom primjenom metode konačnih elemenata.

Tablica 8.1. Rezultati dobiveni analitičkim izrazima i metodom konačnih elemenata.


Udaljenost od središta kugle (mm)	Skalarni električni potencijal (V)		Jakost električnog polja (V/m)	
	Analitički izračun	MKE	Analitički izračun	MKE
0	180,0	172,9	0	0
50	180,0	172,9	3600	3565
100	90,0	82,47	900	898,0
200	45,0	37,52	225	224,2
500	18,0	10,48	36	36,26

Usporedbom numeričkih vrijednosti za skalarni električni potencijal i jakost električnog polja sažetih u tablici 8.1 može se uočiti da je manja razlika između brojčanih vrijednosti dobivenih analitičkim izrazima i numeričkog proračuna primjenom metode konačnih elemenata (MKE) za električno polje, dok se prihvatljivo, ali primjetnije odstupanje, opaža za rezultate koji se odnose na skalarni električni potencijal.

Za razmatranje!

Što je razlog tome da je manja razlika u brojčanim vrijednosti rezultata dobivenih analitičkim izrazima i primjenom MKE-a za električno polje, odnosno zašto je veća razlika u brojčanim vrijednostima rezultata dobivenih analitičkim izrazima i primjenom MKE-a za skalarni električni potencijal?

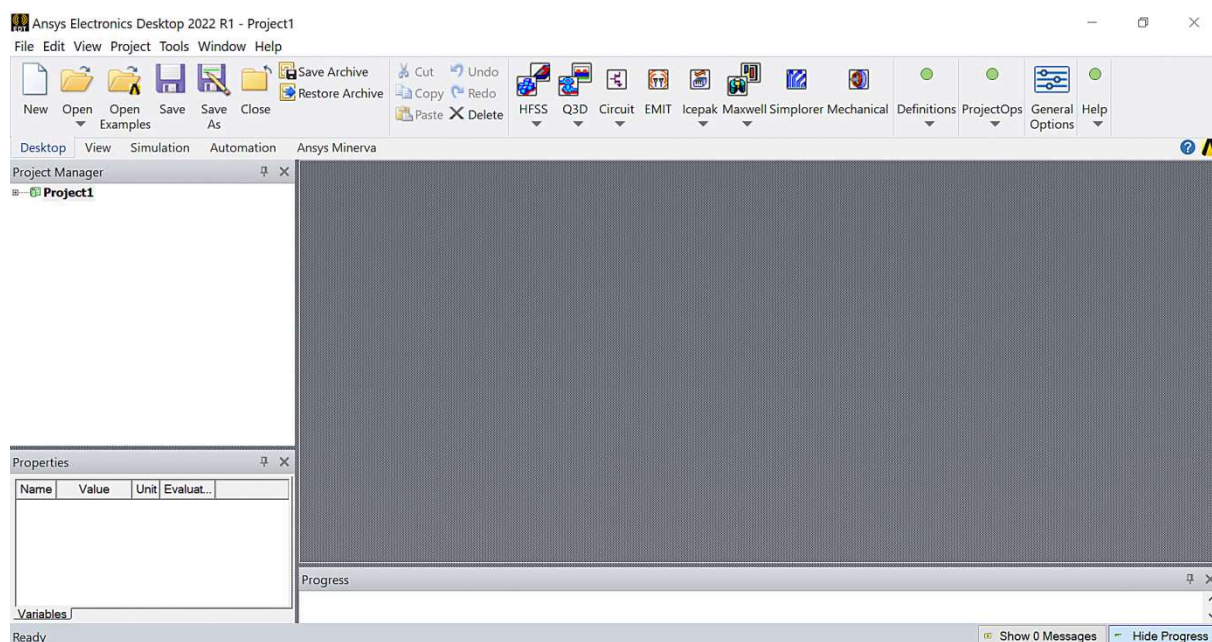
9. MODELIRANJE UZEMLJIVAČA

Klikom na ikonu „“ programskog paketa Ansys na monitoru se pojavljuje pozdravni zaslon (engl. *Splash screen*) koji ima izgled kako je prikazano na slici 9.1.



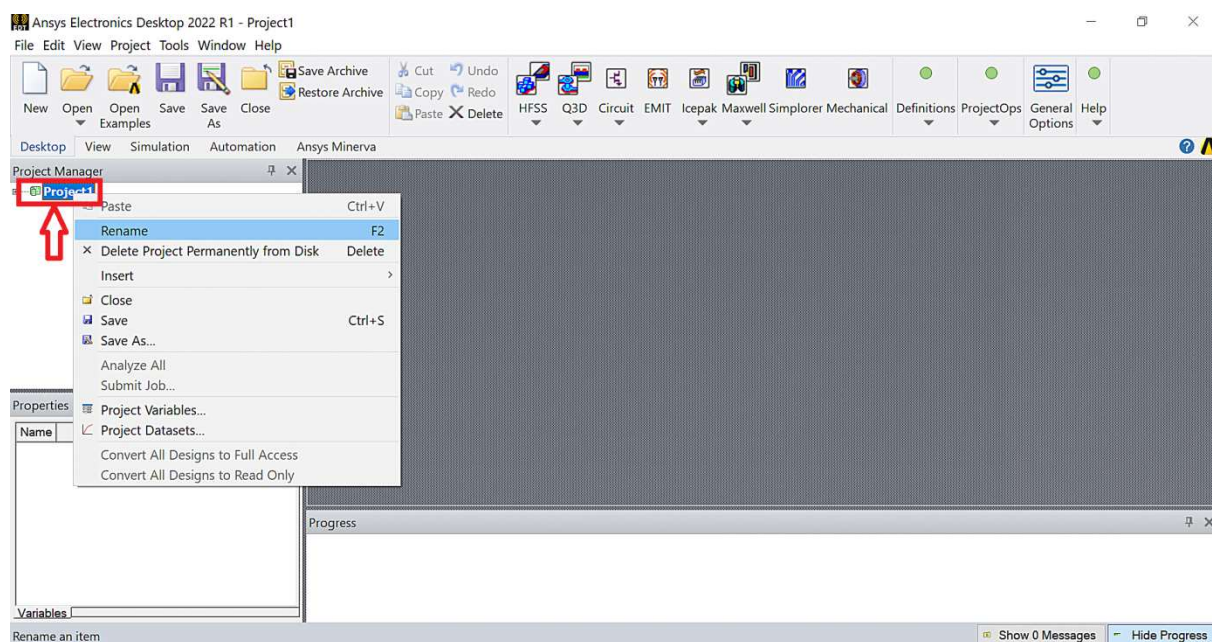
Slika 9.1 Pozdravni zaslon programskog paketa Ansys.

Učitavanje je programskog paketa Ansys automatsko kao i povezivanje na mrežu, a po završetku učitavanja i uspostave mreže, u svrhu provjere valjanosti licence, pojavljuje se glavni prozor programa kao na slici 9.2.

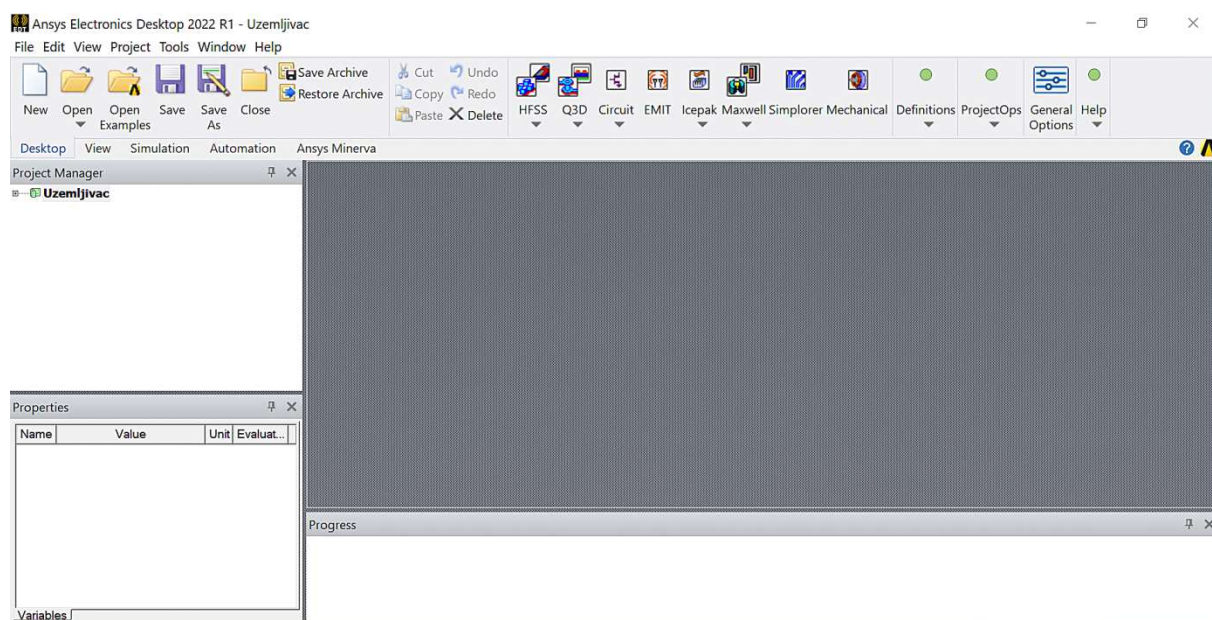


Slika 9.2 Glavni prozor programskog paketa Ansys.

Promjena imena projekta obavlja se desnim klikom miša na polju „*Project Manager*“ na trenutni naziv projekta „*Project1*“ nakon čega se otvara opcija „*Rename*“ (slika 9.3). Klikom na opciju „*Rename*“ omogućava se imenovanje projekta po vlastitom izboru. Na primjer, neka je odabran naziv „*Uzemljivac*“ kao što je prikazano na slici 9.4.

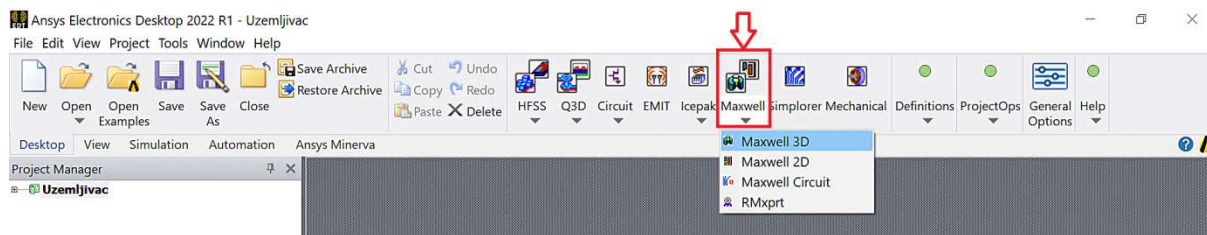


Slika 9.3 Promjena imena projekta u voditelju projekta „*Project Manager*“.



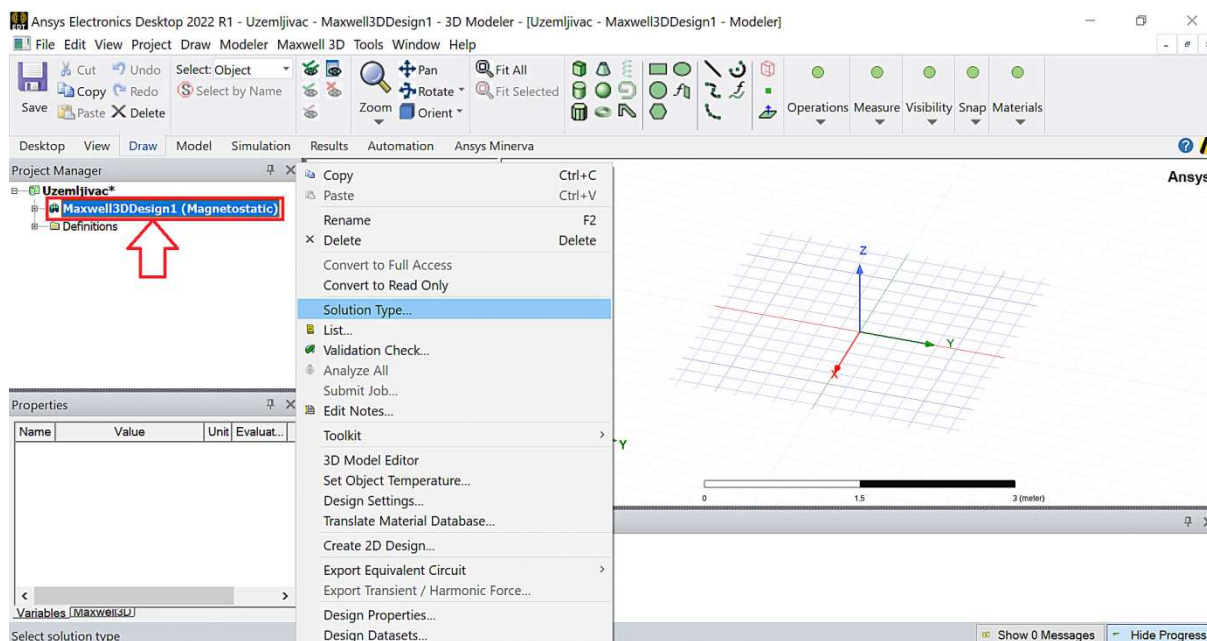
Slika 9.4 Izgled glavnog prozora nakon promjene imena projekta.

Za potrebe ove vježbe koristit će se programski modul „*Maxwell*“ namijenjen za simulaciju i analizu elektromagnetskih zadataka na niskim frekvencijama. Izbor programskog modula „*Maxwell*“ obavlja se na način kako je to prikazano slikom 9.5.

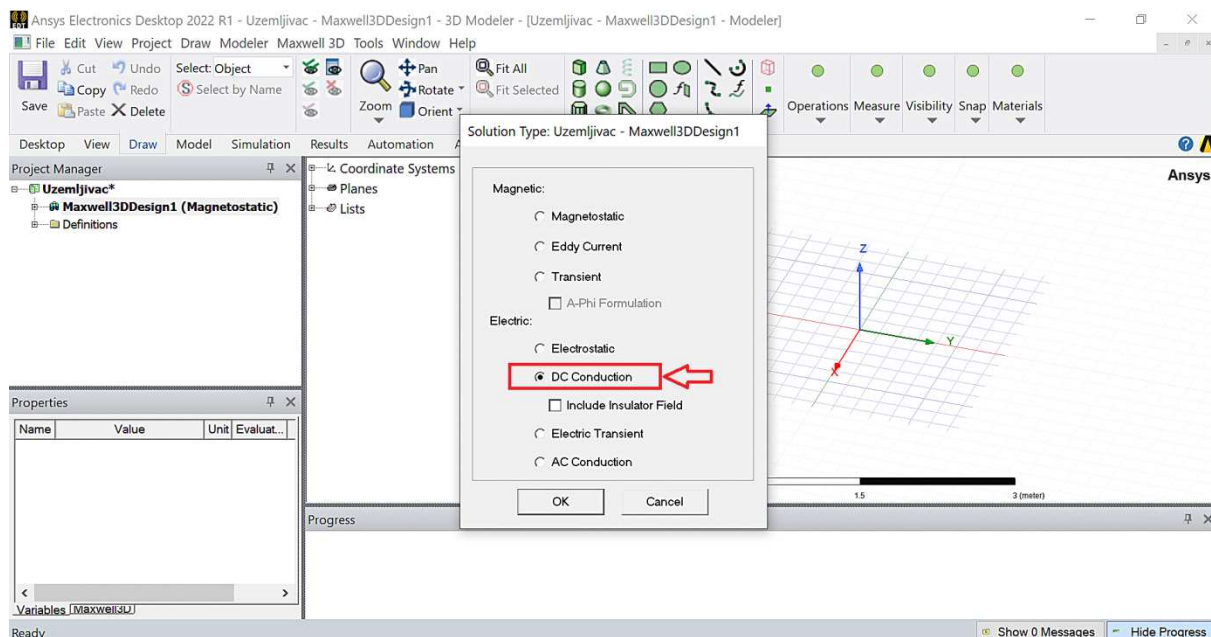


Slika 9.5 Izbor programskog modula Maxwell 3D.

Nakon izbora programskog modula Maxwell 3D, pojavljuje se prozor kao na slici 9.6. Programski modul Maxwell koristi visokospecijalizirane rješavače elektromagnetskih (EM) zadataka zasnovane na različitim skupovima Maxwellovih jednadžbi, odnosno različitim formulacijama EM polja za čije se rješavanje koristi metoda konačnih elemenata (MKE). Ovisno o tome za koju se vrstu EM zadatke želi ishoditi rješenje „*Solution Type*“, izbor rješavača EM polja nalazi se pod opcijom „*Solution Type*“ te se dijele na dva skupa pod nazivima „*Magnetic*“ i „*Electric*“. U skupu „*Magnetic*“ moguće je odabrati tri rješavača EM zadatke pod nazivima „*Magnetostatic*“, „*Eddy Current*“ i „*Transient*“. U skupu „*Electric*“ moguće je odabrati tri rješavača EM zadatke po nazivima „*Electrostatic*“, „*DC Conduction*“ i „*Electric Transient*“. Ovisno o zadanim (unaprijed definiranim) postavkama programskog paketa Ansys pojavljuje se određeni unaprijed zadani rješavač EM zadatke. Prema slici 9.6, to je rješavač elektromagnetskih zadataka za magnetostatiku (engl. *Magnetostatic*). Kako bi se promijenio rješavač elektromagnetske zadatke u „*DC Conduction*“ potrebno je promijeniti „*Solution Type*“, što se obavlja na način kako je prikazano na slici 9.6. i slici 9.7.

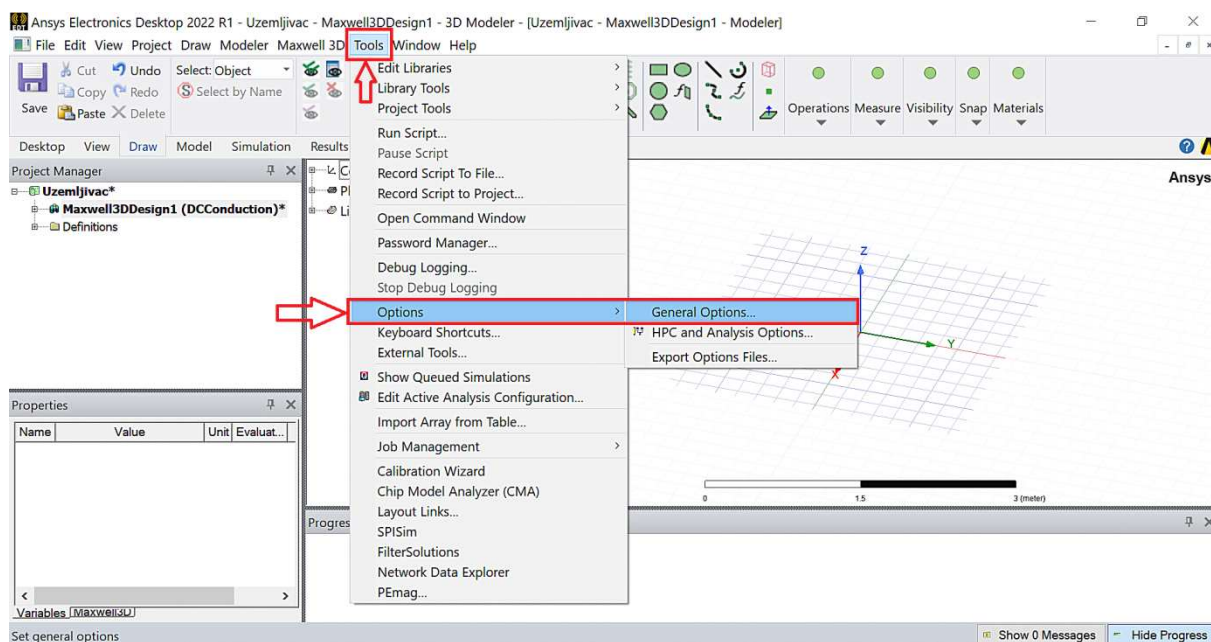


Slika 9.6 Polje „*Project Manager*“ u kojemu je vidljiv trenutno postavljen rješavač elektromagnetskih zadataka i odabir opcije „*Solution Type*“.



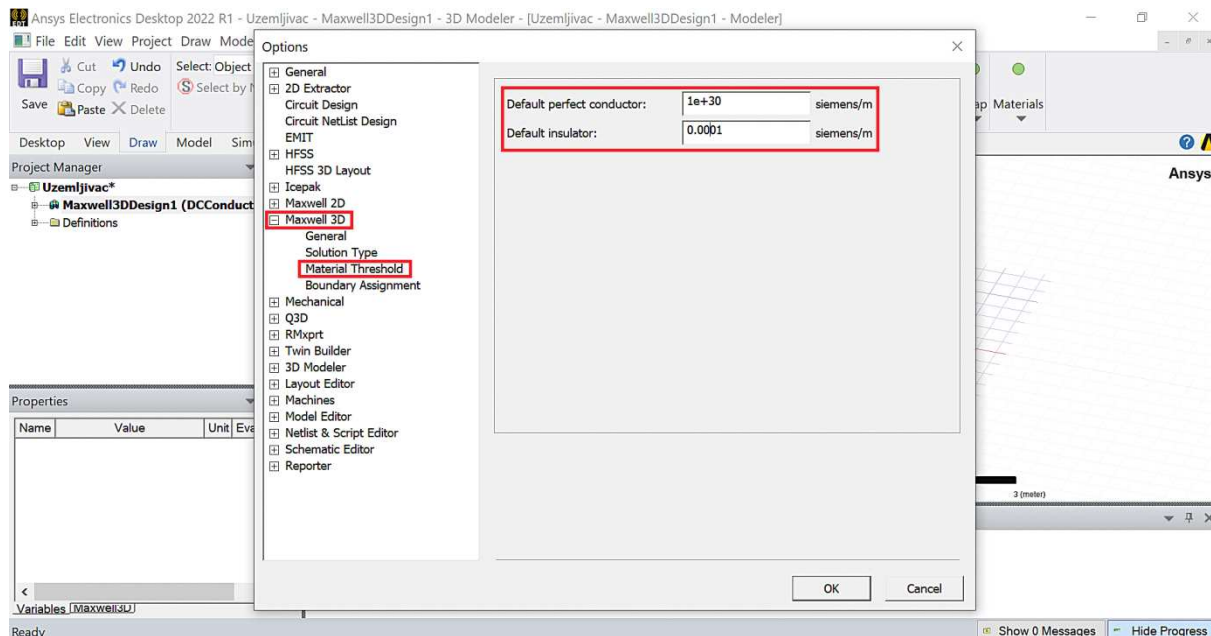
Slika 9.7 Izbor rješavača elektromagnetske zadaće „DC Conduction“.

Klikom na tipku „OK“, prikazanoj na slici 9.7, mijenja se rješavač EM zadaće, što se može vidjeti u polju „Project Manager“ kako je to prikazano na slici 9.8. Prije korištenja rješavača EM zadaće „DC Conduction“ potrebno je provjeriti i, prema ukazanoj potrebi, definirati granice električne vodljivosti izražene u mjernim jedinicama S/m (Siemens po metru) pri kojima program smatra materijale izolatorima ili savršenim vodičima. Navedeno se postiže klikom na „Tools“, zatim „Option“ te „General Options“ kako je prikazano slikom 9.8.

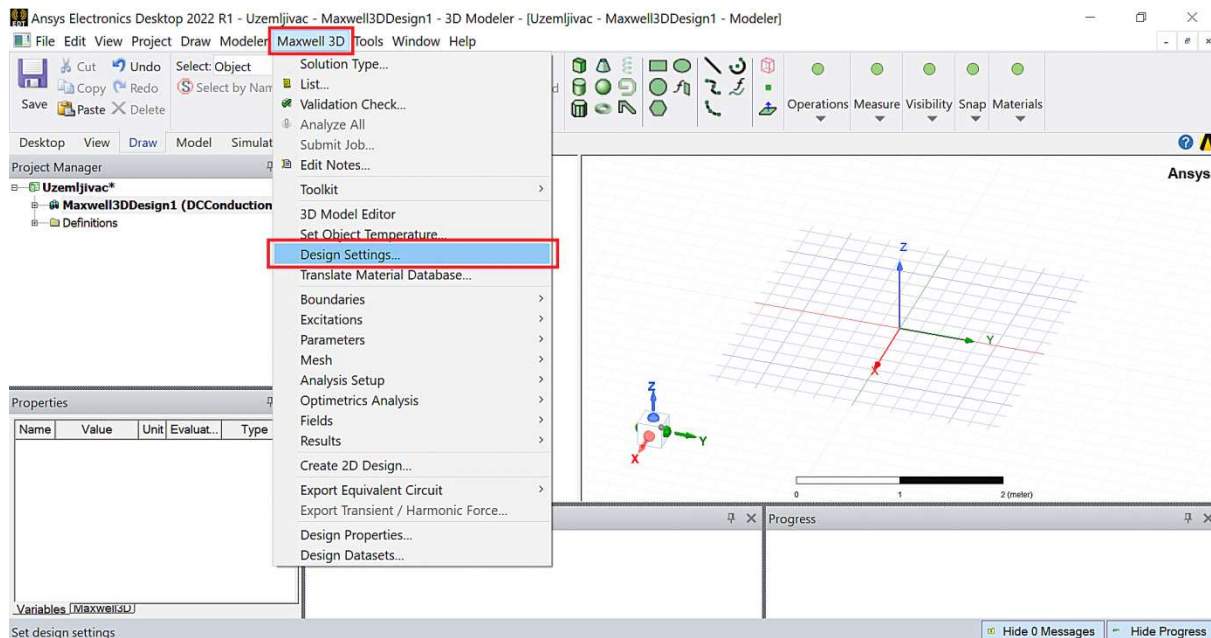


Slika 9.8 Pristupanje općim opcijama „General Options“.

Odabirom „*General Options*“ otvara se izbornik (slika 9.9) u kojemu je potrebno odabrati rješavač EM zadaje „*Maxwell 3D*“ te opciju „*Material Threshold*“. Postaviti brojčane vrijednosti vodljivosti kojima su definirani pragovi za savršen vodič i izolator na iznose prikazane slikom 9.9. Navedeno je potrebno ponoviti u postavkama dizajna „*Design Settings*“ za „*Maxwell 3D*“, što je prikazano slikom 9.10.

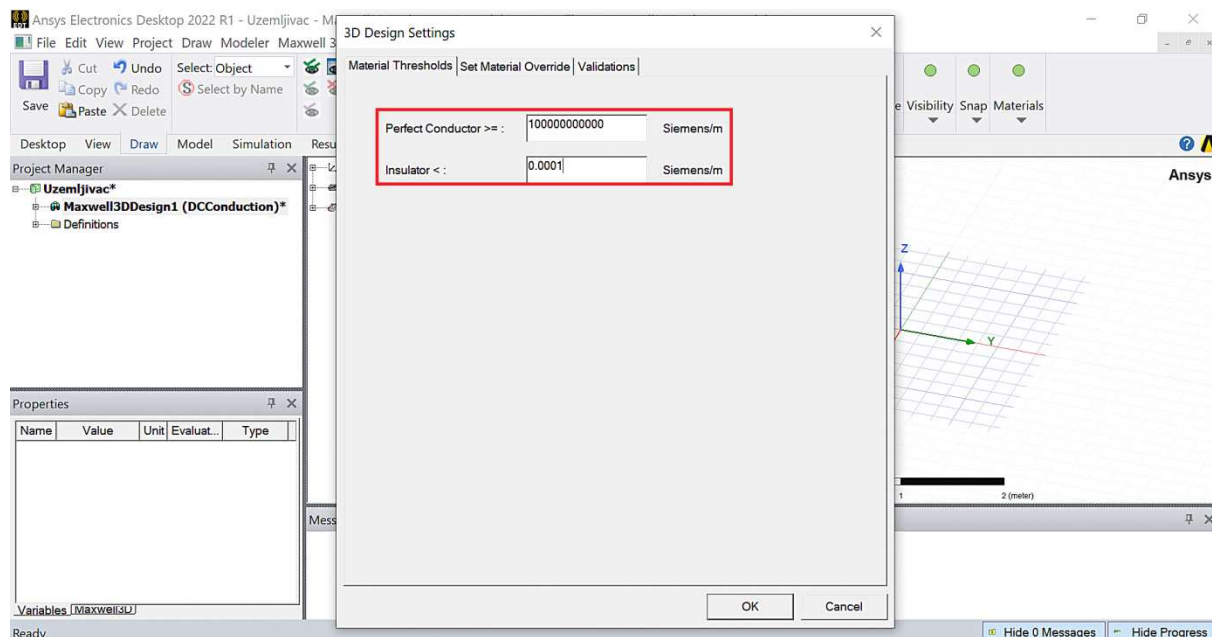


Slika 9.9 Pristupanje postavkama pragova materijala.



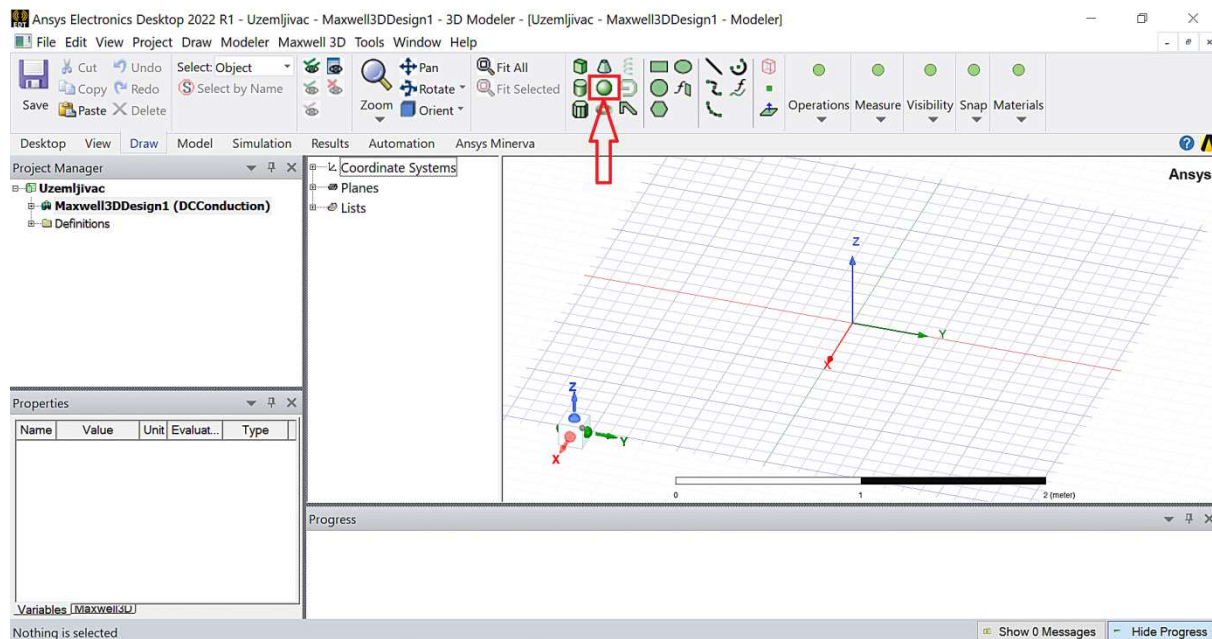
Slika 9.10 Pristupanje postavkama u „*Design Settings*“ za „*Maxwell 3D*“.

Izborom „*Design Settings*” otvara se prozor u kojemu se postavljaju željene brojčane vrijednosti vodljivosti kojima su definirani pragovi za savršen vodič i izolator (slika 9.11).



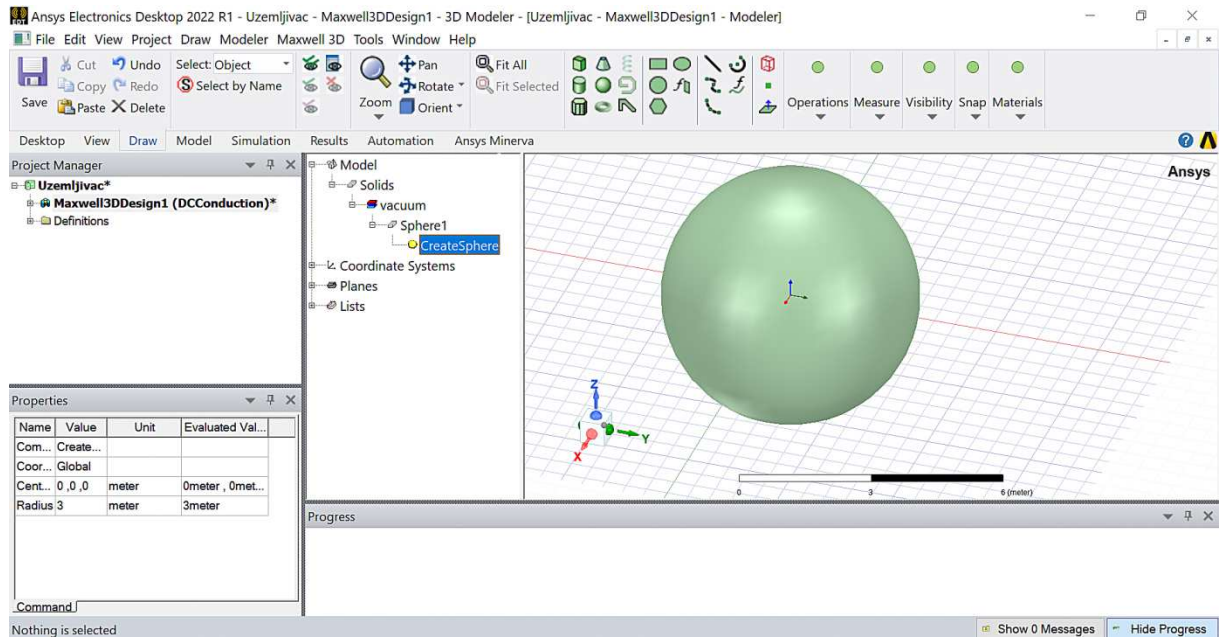
Slika 9.11 Pragovi materijala u „3D Design Settings“ za „Maxwell 3D“.

Crtanje geometrije obavlja se izborom odgovarajućih geometrijskih tijela u ponuđenoj paleti geometrijskih tijela. Za modeliranje tla koristit će se polukugla zbog čega je potrebno prvo odabrati kuglu u paleti ponuđenih geometrijskih tijela (slika 9.12.).

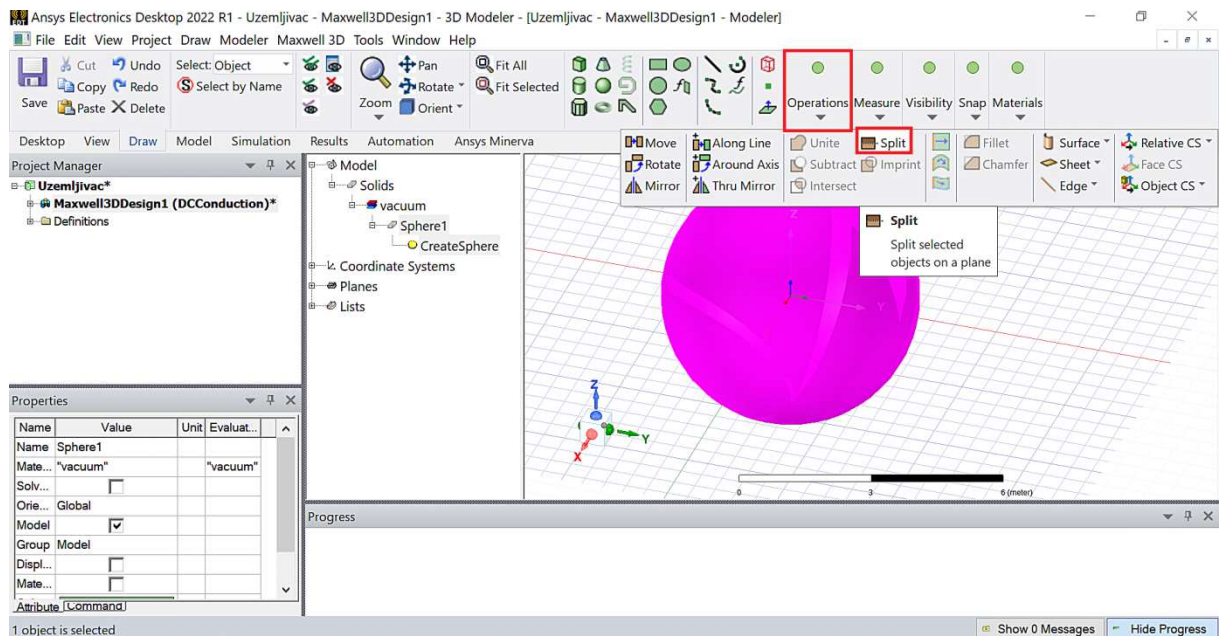


Slika 9.12 Položaj i izbor geometrijskog tijela kugle u paleti ponuđenih geometrija.

Radi daljnjih pogodnosti, neka se središte nacrtane kugle podudara sa središtem koordinatnog sustava i neka je njezin radijus 3 m koji će kasnije biti promijenjen na drugi iznos (slika 9.13.). S obzirom da će tlo biti modelirano kao polukugla, nacrtanu kuglu potrebno je prepoloviti duž xy ravnine na način da se zadrži dio koji je ispod xy ravnine ($z \leq 0$). Navedeno se obavlja izborom operacije „Split“ kako je to prikazano slikom 9.14.

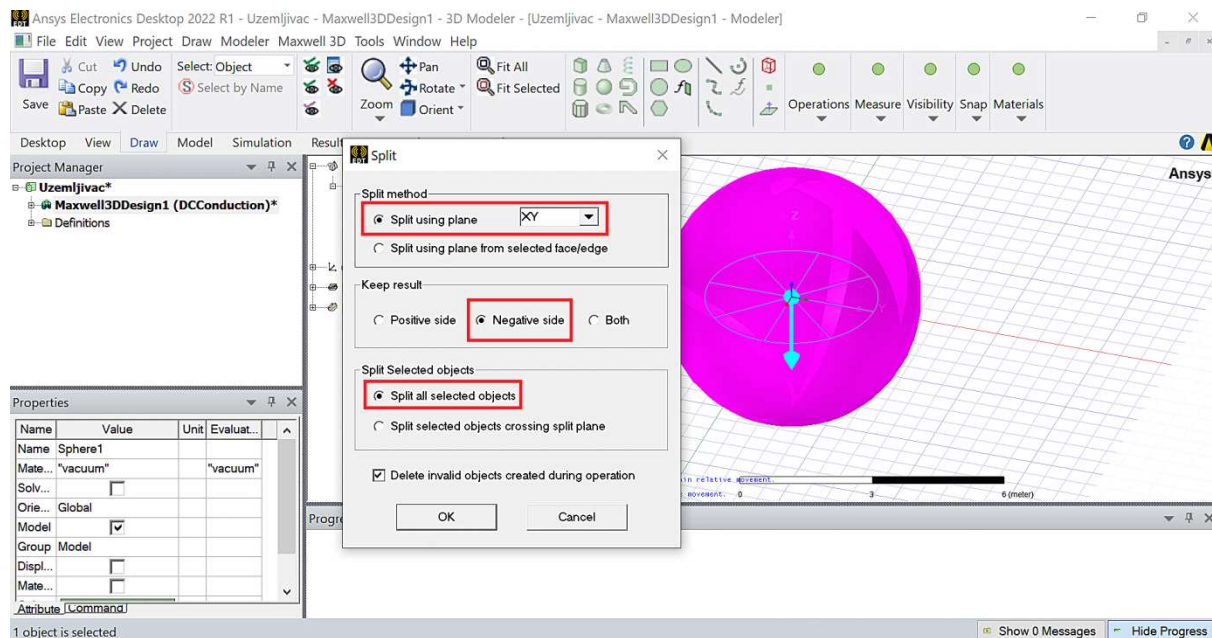


Slika 9.13 Izgled modelirane kugle i njezini parametri (polje „Properties“).

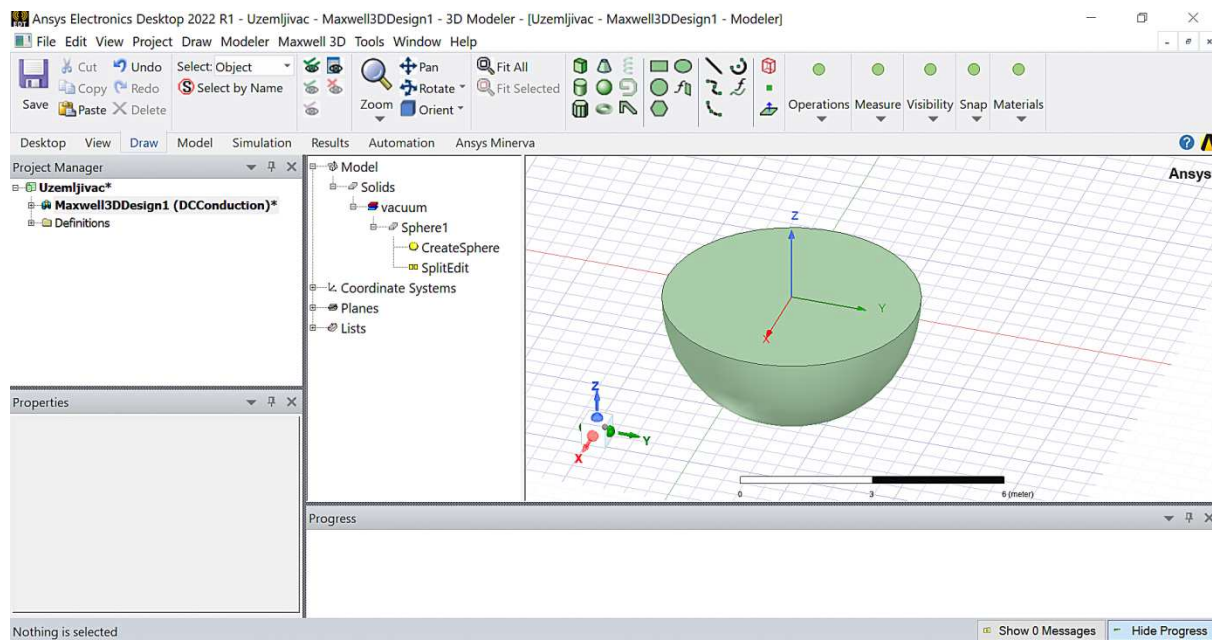


Slika 9.14 Izbor operacije „Split“.

Nakon izbora operacije „Split“ otvara se prozor u kojemu se po želji zadaju parametri operacije „Split“. Parametre operacije „Split“ potrebno je postaviti na vrijednosti kako je prikazano slikom 9.15. Klikom na „OK“ potvrđuje se izbor parametara operacije „Split“ na radnoj površini modela te će se pojaviti polukugla kako je to prikazano slikom 9.16.

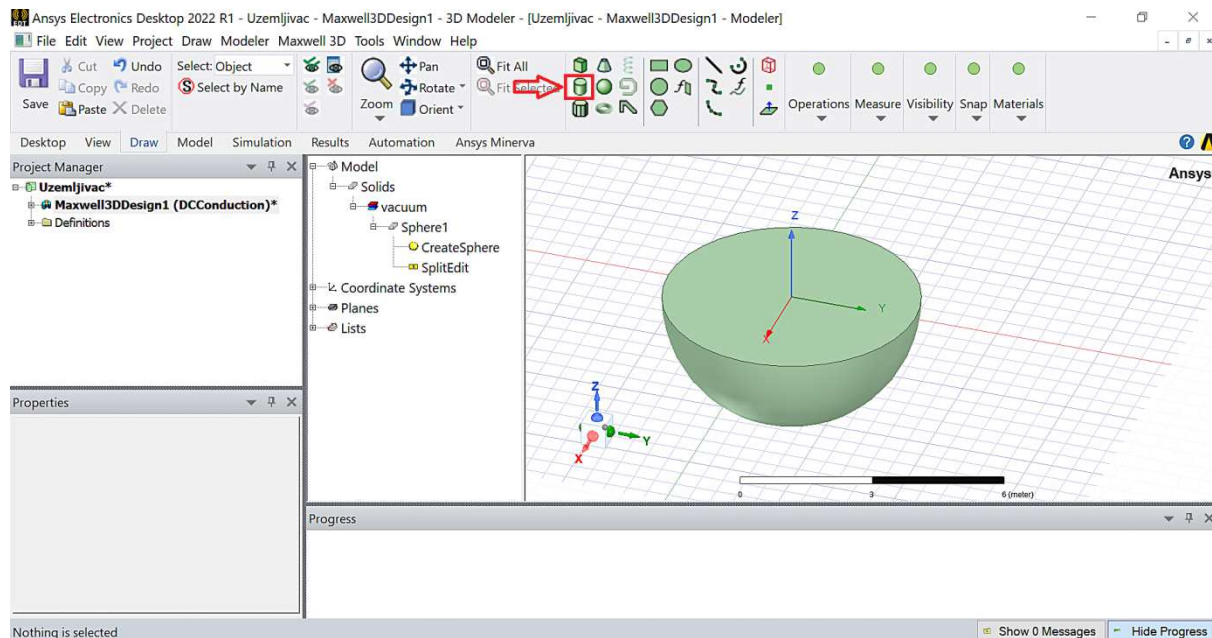


Slika 9.15 Postavljanje vrijednosti parametara operacije „Split“.

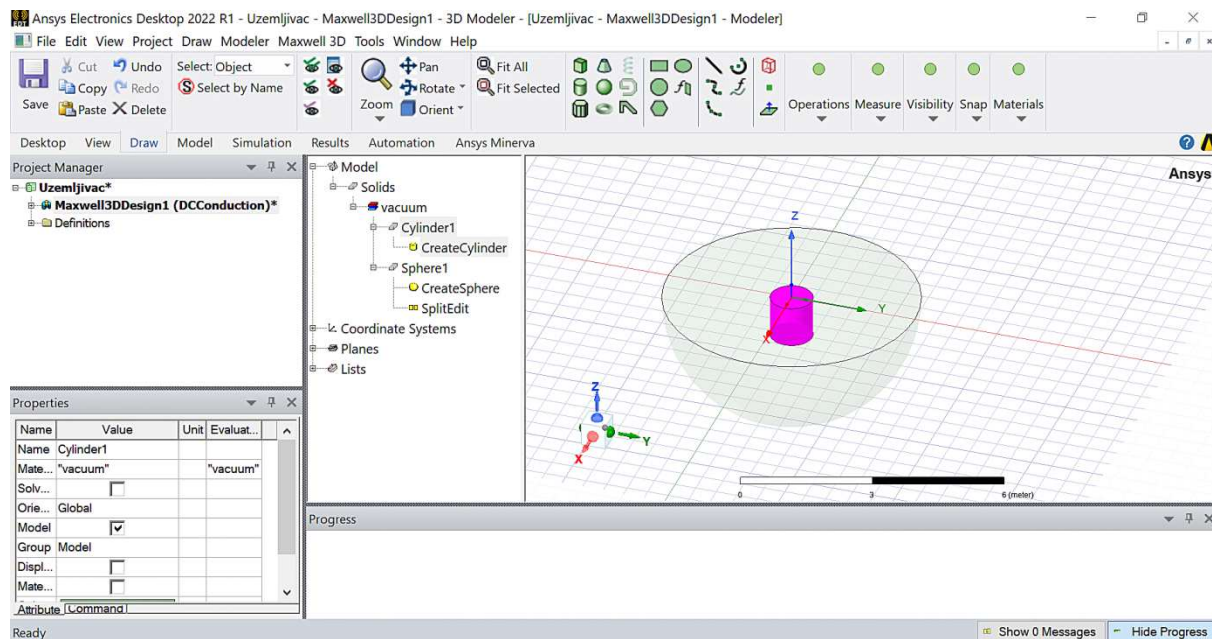


Slika 9.16 Izgled polukugle nakon primjene operacije „Split“.

U ovoj vježbi modelira se i analizira vertikalni cjevasti uzemljivač. U modelu tla, na poziciji uzemljivača, prvo je potrebno načiniti prazninu koja će kasnije biti ispunjena materijalom uzemljivača. Izbor geometrijskog tijela cilindra obavlja se na poziciji prikazanoj slikom 9.17. Nakon crtanja cilindra, vodeći pažnju da se gornja baza podudara s xy ravninom te da se uzdužna os cilindra poklapa sa z -osi, dobiva se privremeni model tla kao što je prikazano slikom 9.18.

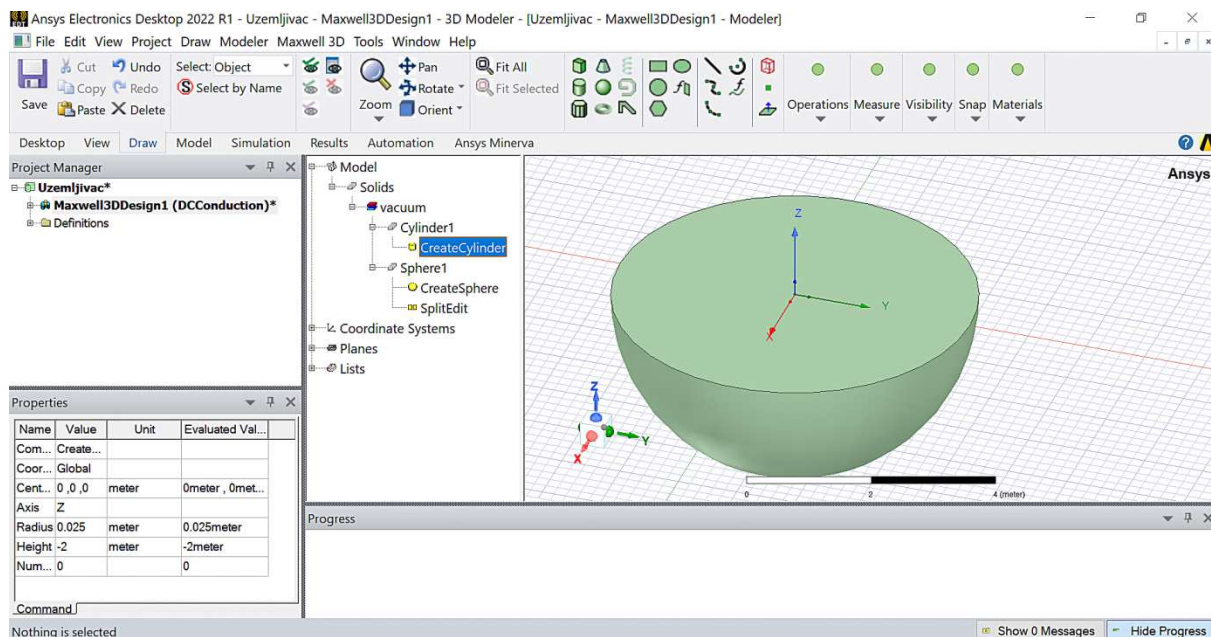


Slika 9.17 Izbor geometrijskog tijela cilindra.

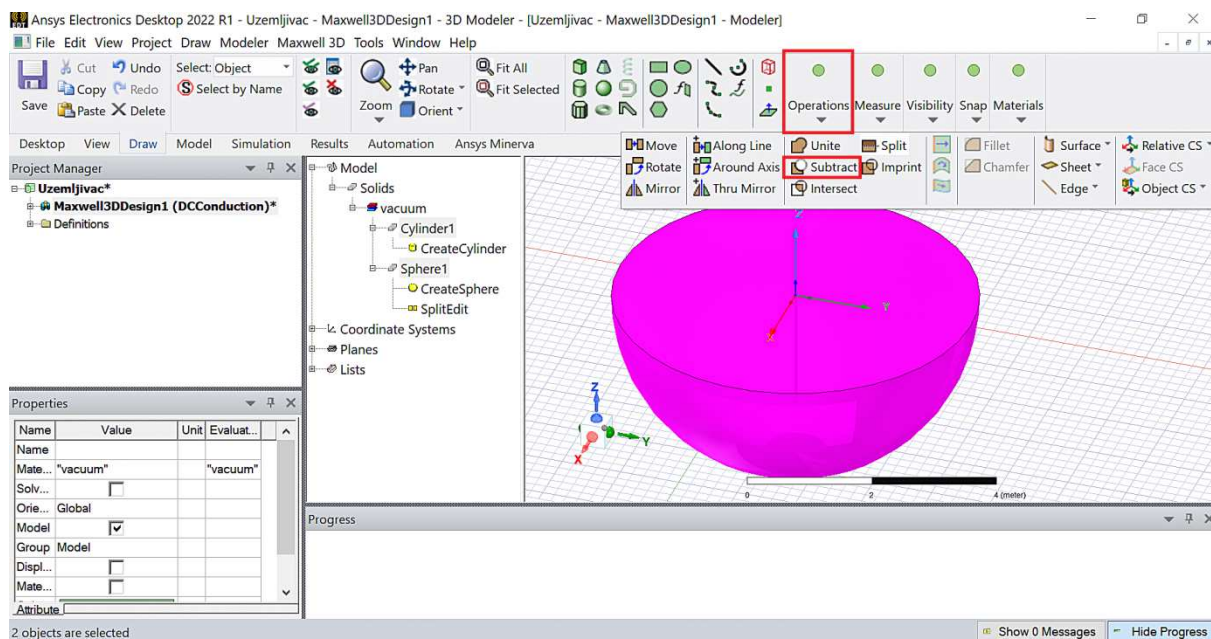


Slika 9.18 Privremeni izgled modela tla.

Radi kasnijih pogodnosti, neka parametri nacrtanog cilindra privremeno budu jednaki onima prikazanim slikom 9.19. Parametri nacrtanog cilindra prikazani su u polju „*Properties*“ koje se pojavljuje nakon što se mišem klikne na „*Create Cylinder*“ u polju „*Model*“. U sljedećem koraku potrebno je načiniti prazninu u tlu na mjestu gdje je nacrtan cilindar (kasnije će tu prazninu ispunjavati materijal uzemljivača). Navedeno se postiže primjenom operacije „*Subtract*“ (slika 9.20). Prije primjene operacije „*Subtract*“ potrebno je istovremeno odabrati polukuglu i cilindar, a kada je to učinjeno, promijeni se boja selektirane geometrije kao što je to prikazanom slikom 9.20.

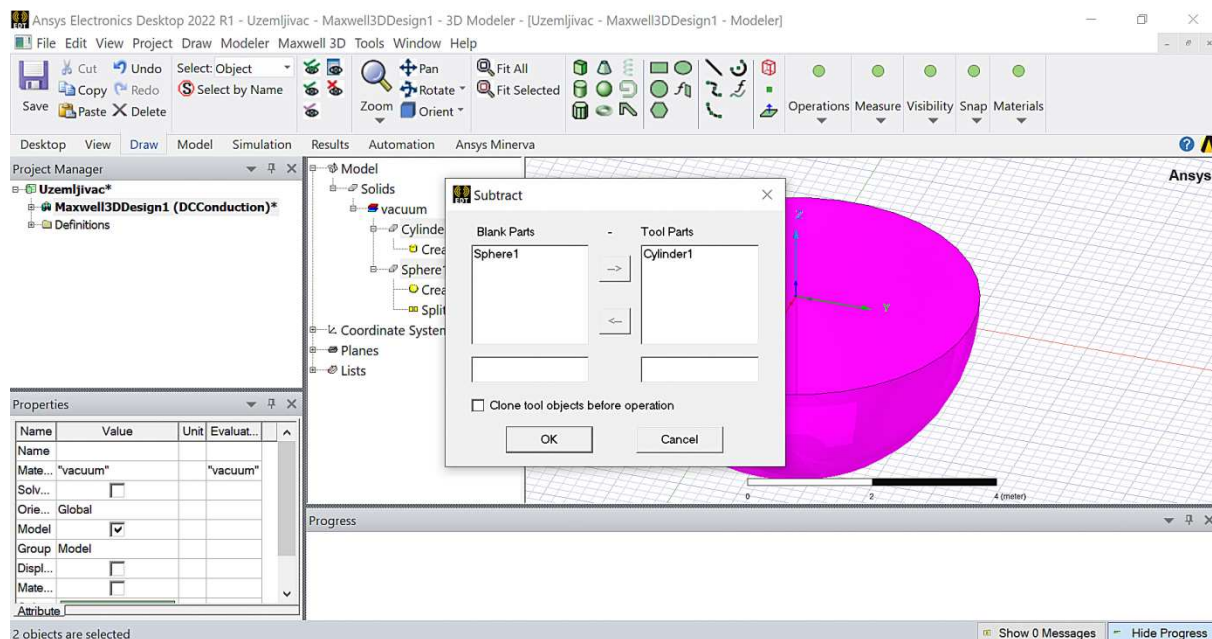


Slika 9.19 Prikaz parametara cilindra u polju „*Properties*“.

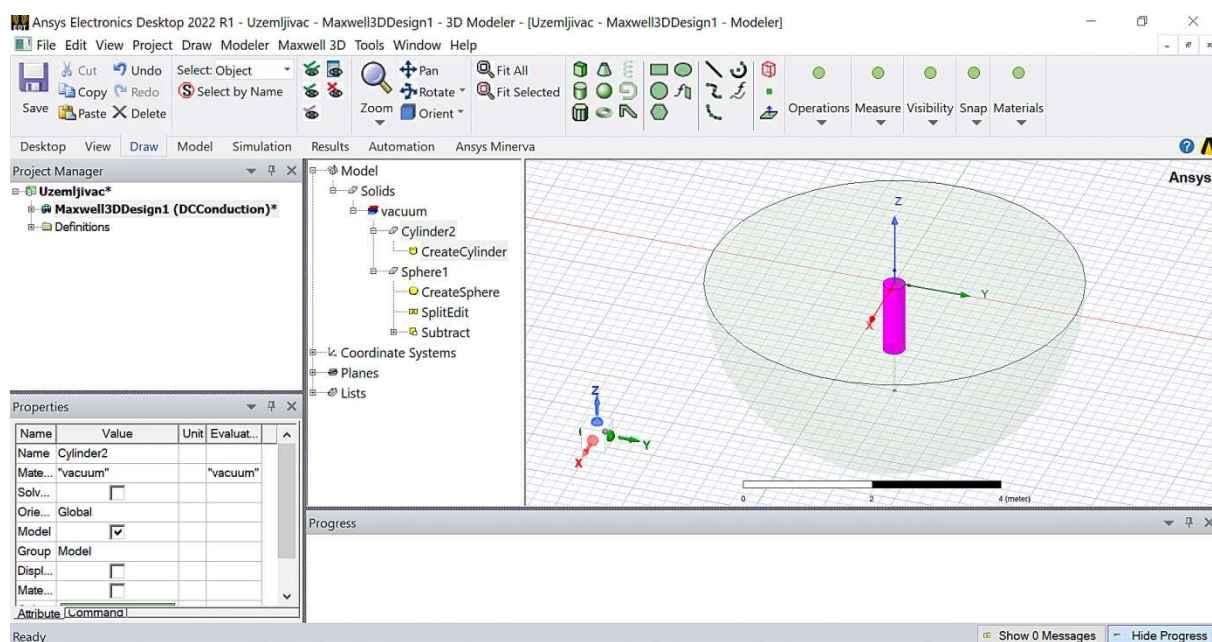


Slika 9.20 Izbor operacije „*Subtract*“.

Klikom na operaciju „*Subtract*“ otvara se prozorčić (slika 9.21) u kojemu se definiraju parametri operacije „*Subtract*“. Prema slici 9.21, od geometrijskog tijela pod nazivom „*Sphere1*“, oduzet će se volumen određen geometrijskim tijelom pod nazivom „*Cylinder1*“. Nakon potvrde operacije „*Subtract*“ klikom na „*OK*“ stvorena je praznina u polukugli oblika cilindra. Tu prazninu potrebno je ispuniti novim geometrijskim tijelom oblika cilindra. Proces crtanja cilindra prethodno je opisan, a po završetku crtanja novog cilindra naziva „*Cylinder2*“ novonastala geometrija modela tla i uzemljivača ima oblika prikazan slikom 9.22.

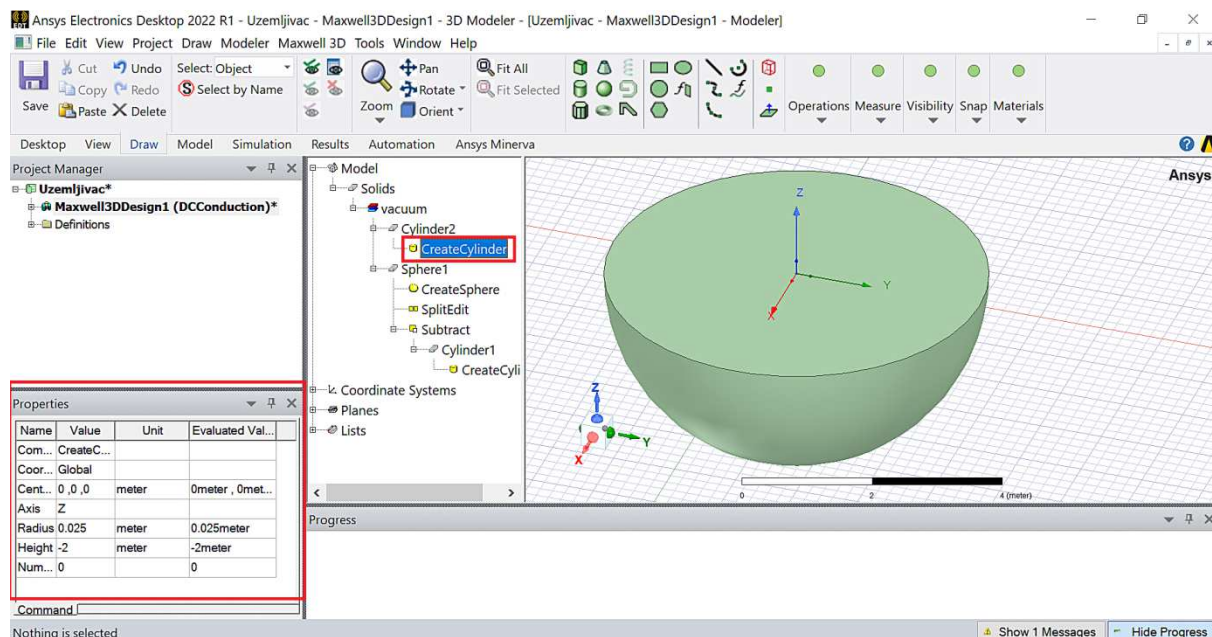


Slika 9.21 Prikaz parametara operacije „*Subtract*“.

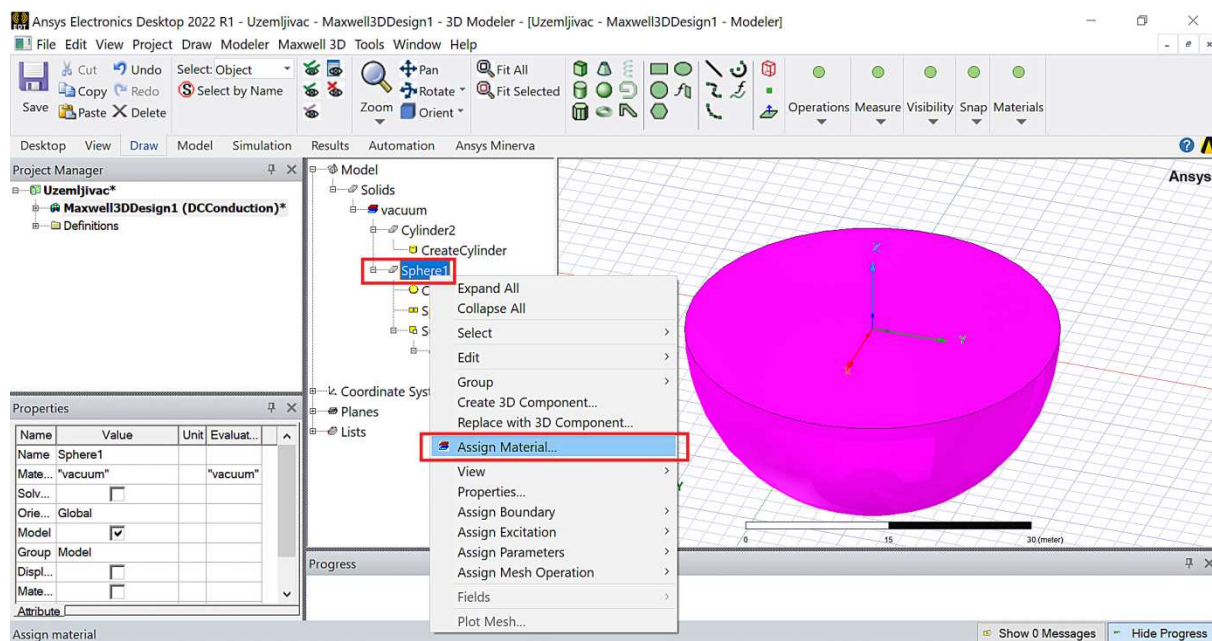


Slika 9.22 Prikaz modela tla oblika polukugle i uzemljivača oblika cilindra.

Geometrijske parametre novog cilindra, koji će kasnije biti uzemljivač, moguće je vidjeti klikom miša u polju modela na „Cylinder2/Create Cylinder“ (slika 9.23). Parametri novog cilindra prikazani su u polju „Properties“ kako je to prikazano slikom 9.23. Naredni je korak pridruživanje materijala svakoj od nacrtanih geometrija. Pridruživanje materijala tlu obavlja se na način kako je to prikazano slikom 9.24. Lijevim klikom miša prvo se odabere geometrija „Sphere1“ te se nakon desnog klika miša otvara izbornik u kojemu je potrebno odabrati opciju „Assign Material“ (slika 9.24).

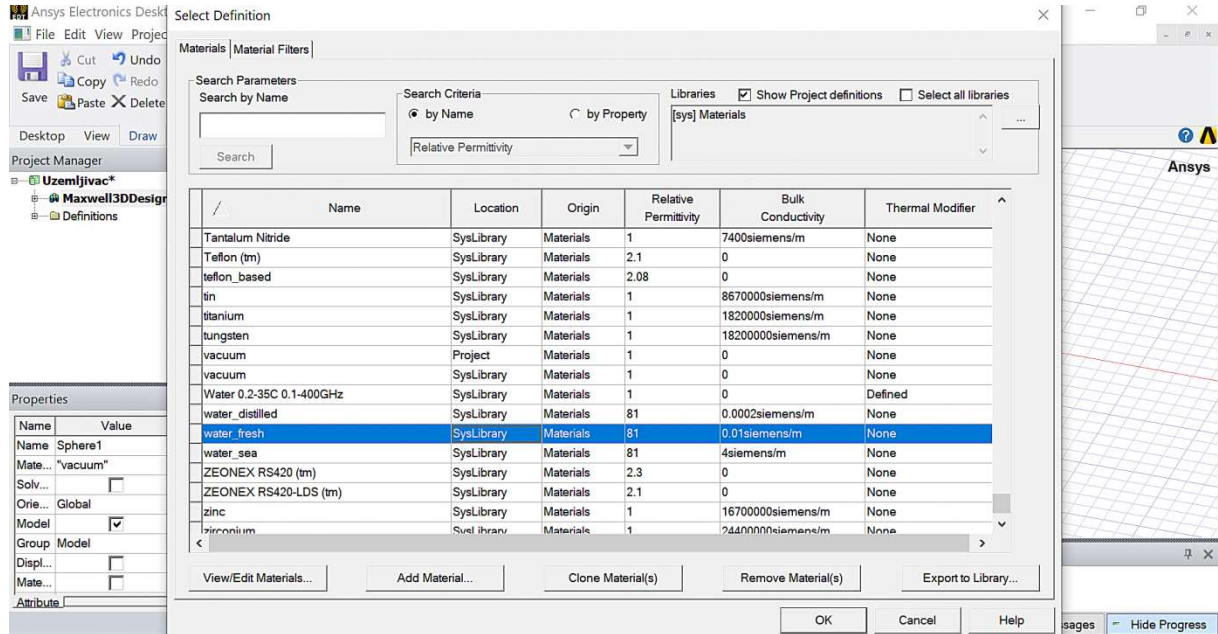


Slika 9.23 Prikaz parametara novog cilindra naziva „Cylinder2“.

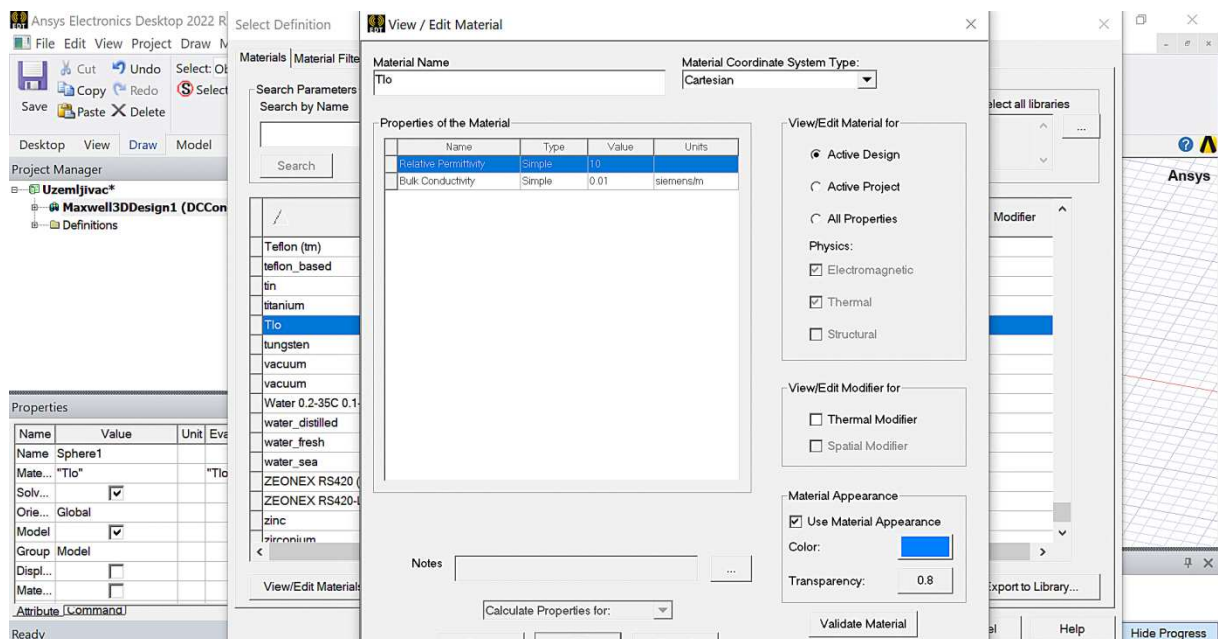


Slika 9.24 Pridruživanje materijala geometriji.

Nakon klika na „Assign Material“ otvara se prozor prikazan slikom 9.25. S obzirom da tlo nije u datoteci ponuđenih materijala, električna svojstva tla potrebno je definirati. Navedeno se može učiniti na način da se prvo odabere materijal sa sličnim električnim svojstvima kao na slici 9.25 te se odabere opcija „Clone Material(s)“. Nakon potvrde opcije „Clone Material(s)“ otvara se prozor kao na slici 9.26 u kojemu je moguće dati naziv novom materijalu (tlo) i zadati njegova električna svojstva ($100 \Omega\text{m} = 0,01 \text{ S/m}$).

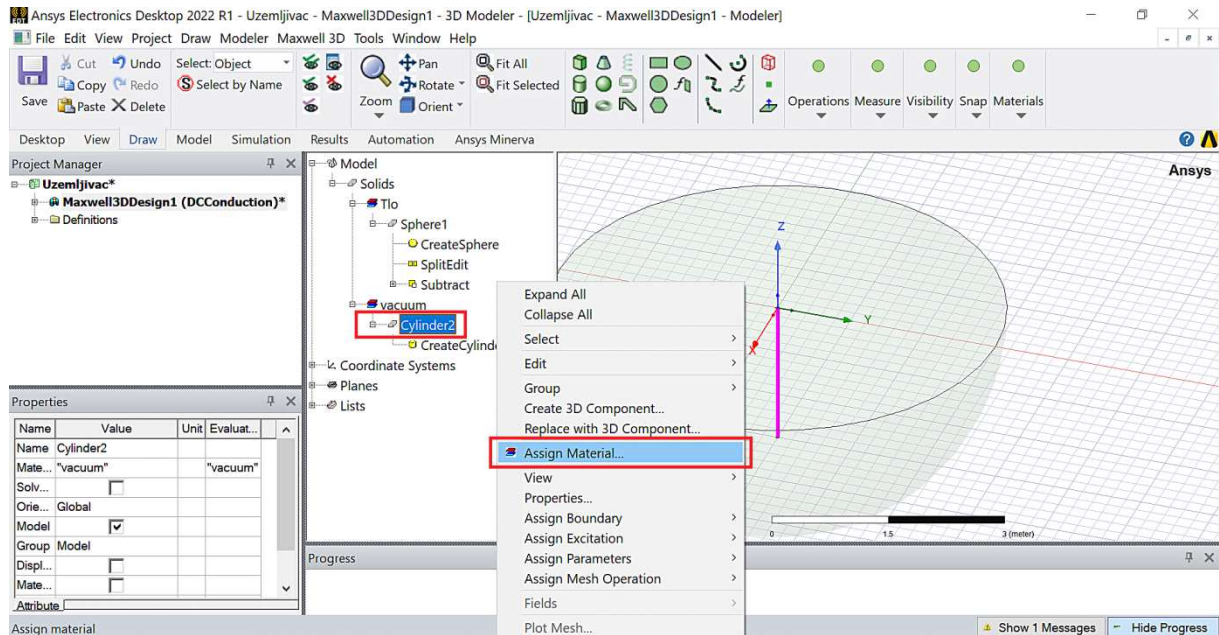


Slika 9.25 Izbor materijala sa sličnim električnim svojstvima.

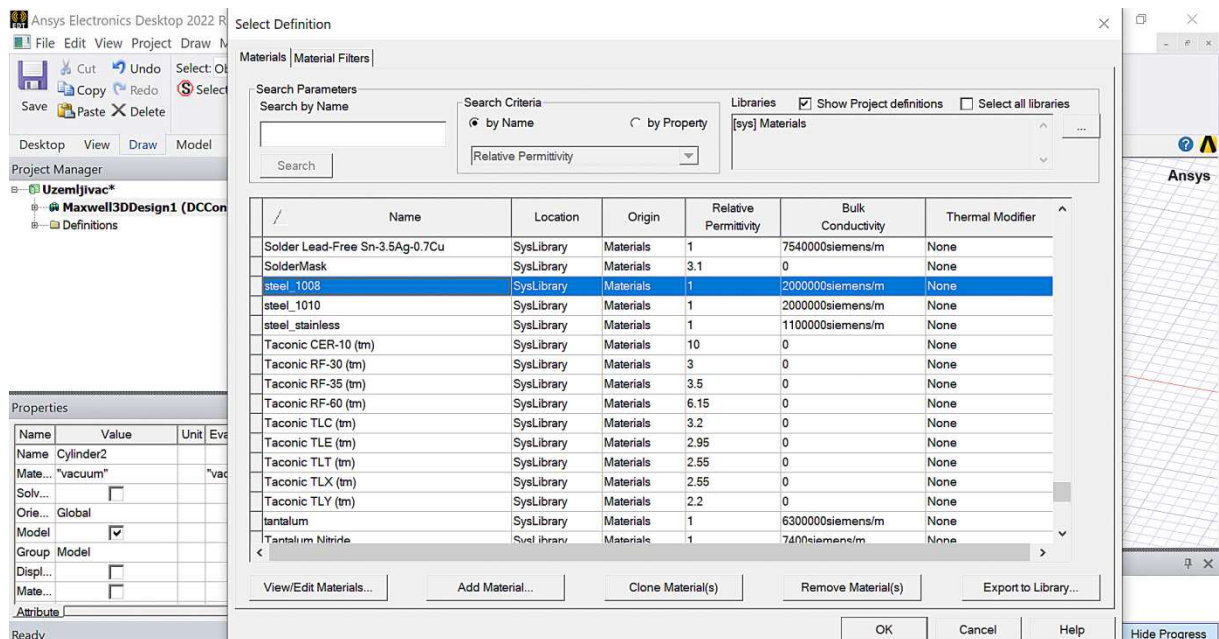


Slika 9.26 Definiranje novog materijala (tla) i njegovih električnih svojstava.

Naredna geometrija kojoj je potrebno pridružiti odgovarajući materijal jest vertikalni cilindar (naziv „Cylinder2“) kojime je modelirano tijelo vertikalnog cjevastog uzemljivača. Lijevim klikom miša prvo se odabere geometrija „Cylinder2“ te se nakon desnog klika miša otvara izbornik u kojemu je potrebno odabrati opciju „Assign Material“ (slika 9.27). Nakon klika na „Assign Material“ otvara se prozor prikazan slikom 9.28. U ovom primjeru za materijal uzemljivača odabran je čelik pod nazivom „Steel_1008“.

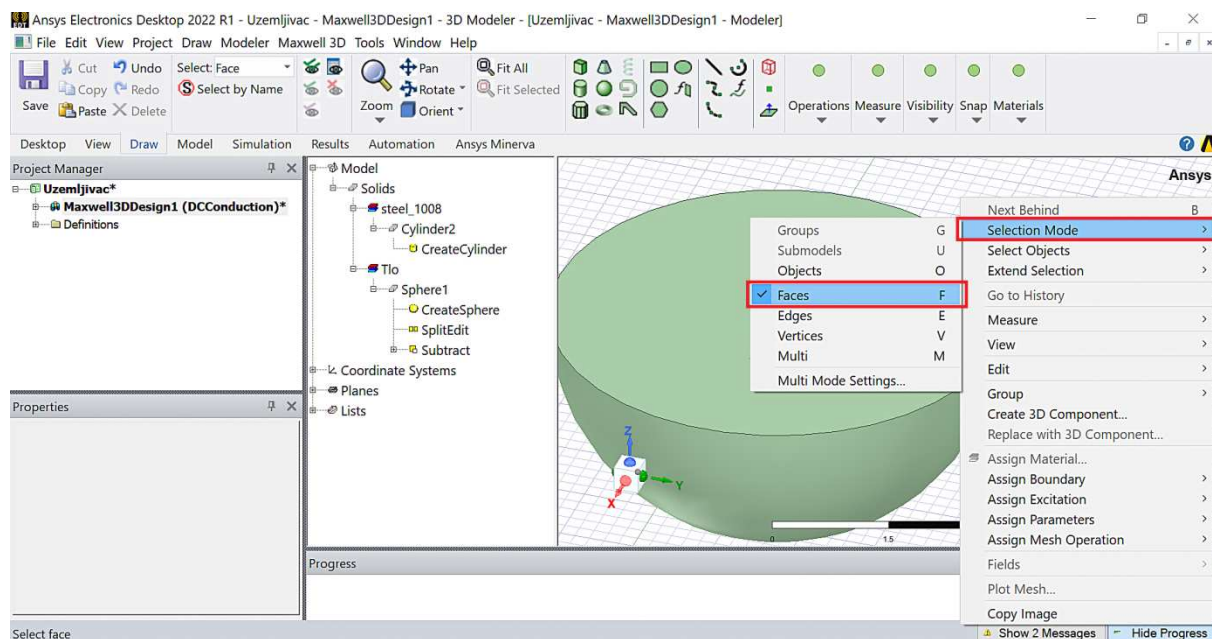


Slika 9.27 Pridruživanje materijala geometriji.

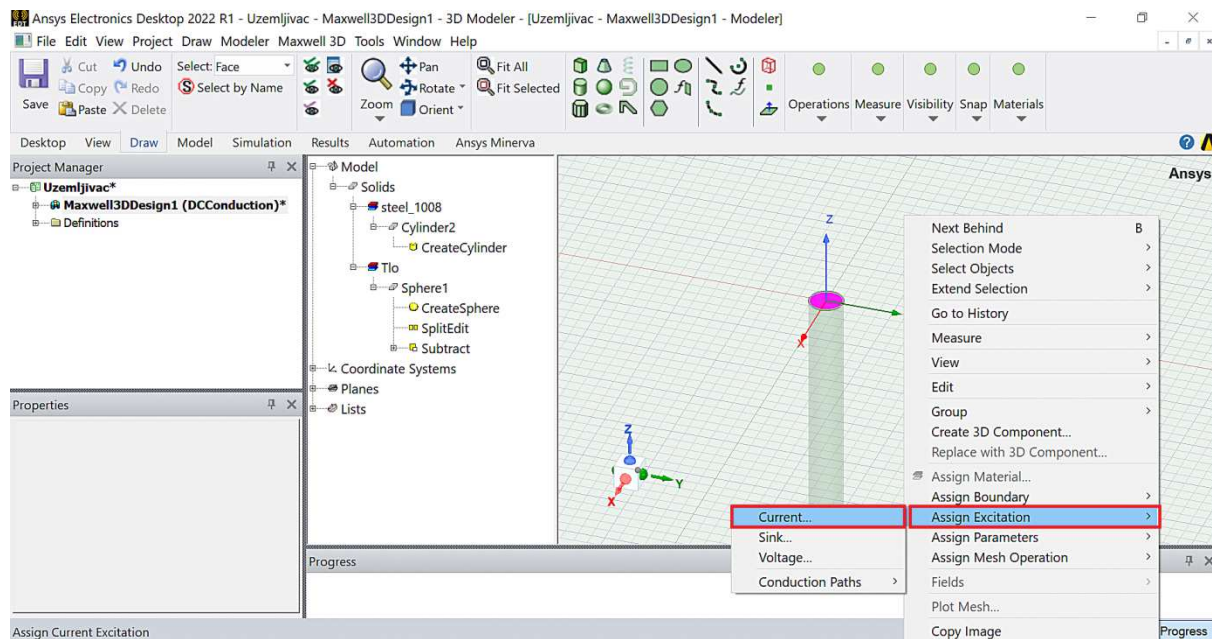


Slika 9.28 Izbor čelika „Steel_1008“ za materijal uzemljivača.

Nakon što je završen postupak pridruživanja materijala svim geometrijskim tijelima u modelu slijedi postupak pridruživanja pobuda sustavu koji se modelira. Pobude se pridružuju ploham, stoga je potrebno prebaciti način selektiranja „*Selection Mode*“ s objekata na lica (engl. *Faces*). Navedeno se obavlja na način kako je to prikazano slikom 9.29. Uzemljivaču će biti pridružena strujna pobuda na gornju bazu. Navedeno se obavlja kako je to prikazano slikom 9.30.

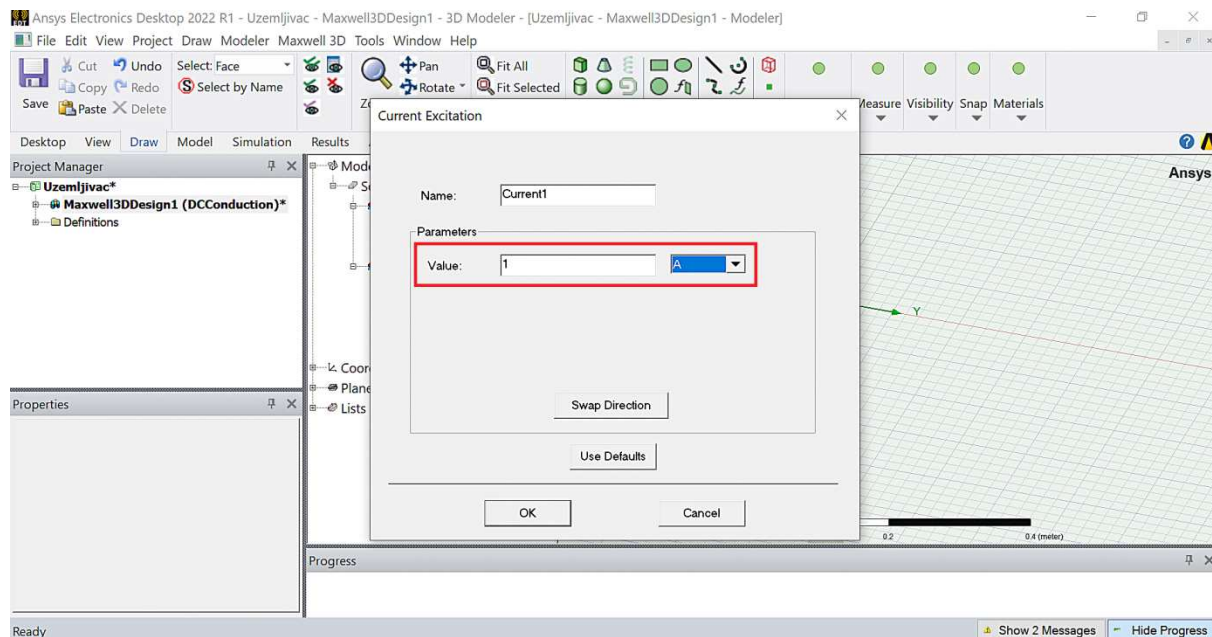


Slika 9.29 Izbor načina selektiranja na lica (engl. *Faces*) geometrijskih tijela.

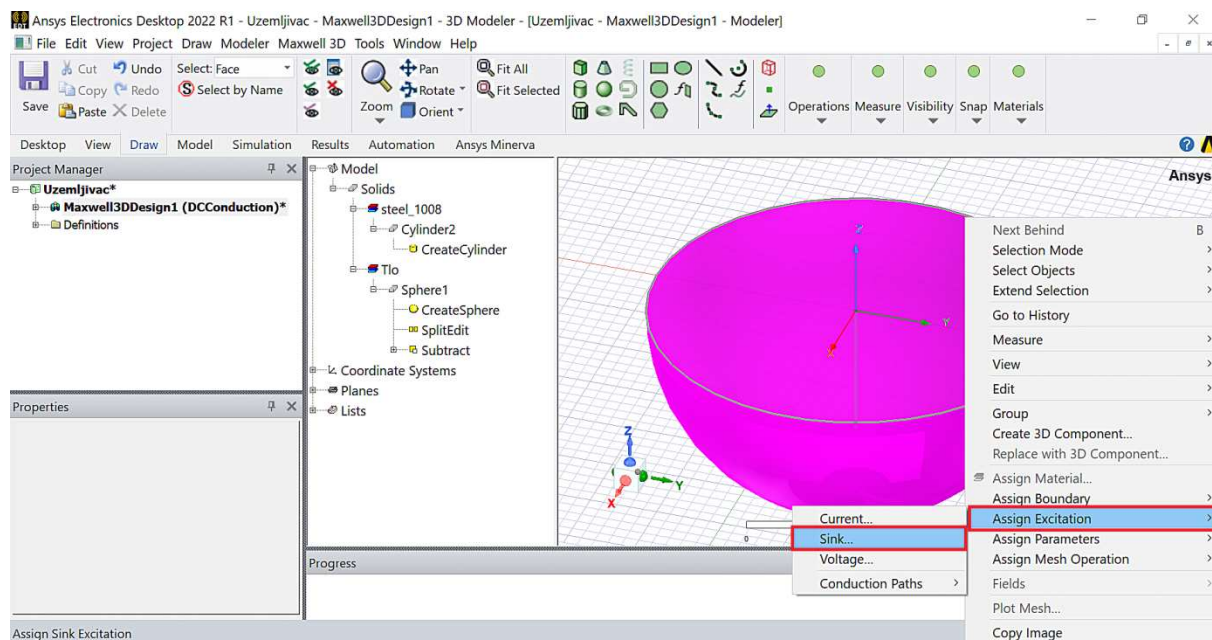


Slika 9.30 Izbor gornje plohe uzemljivača (cilindra) i pridruživanje strujne pobude.

Nakon izbora strujne pobude otvara se prozor u kojemu je moguće zadati parametre struje pobude (slika 9.31). U ovom primjeru odabrana je struja od jednog ampera koja je utisnuta u gornju bazu cilindra kojime je modeliran uzemljivač. Na identičan način potrebno je pridružiti pobudu modelu tla, tj. plaštu polukugle. U ovom primjeru odabran je strujni uvor (engl. *Current Sink*). Na razini modela to znači da će sva utisnuta struja u gornju bazu uzemljivača završiti na plaštu polukugle kojom je modelirano tlo, odnosno plašt polukugle postaje uvor struje utisnute strujnim izvorom.

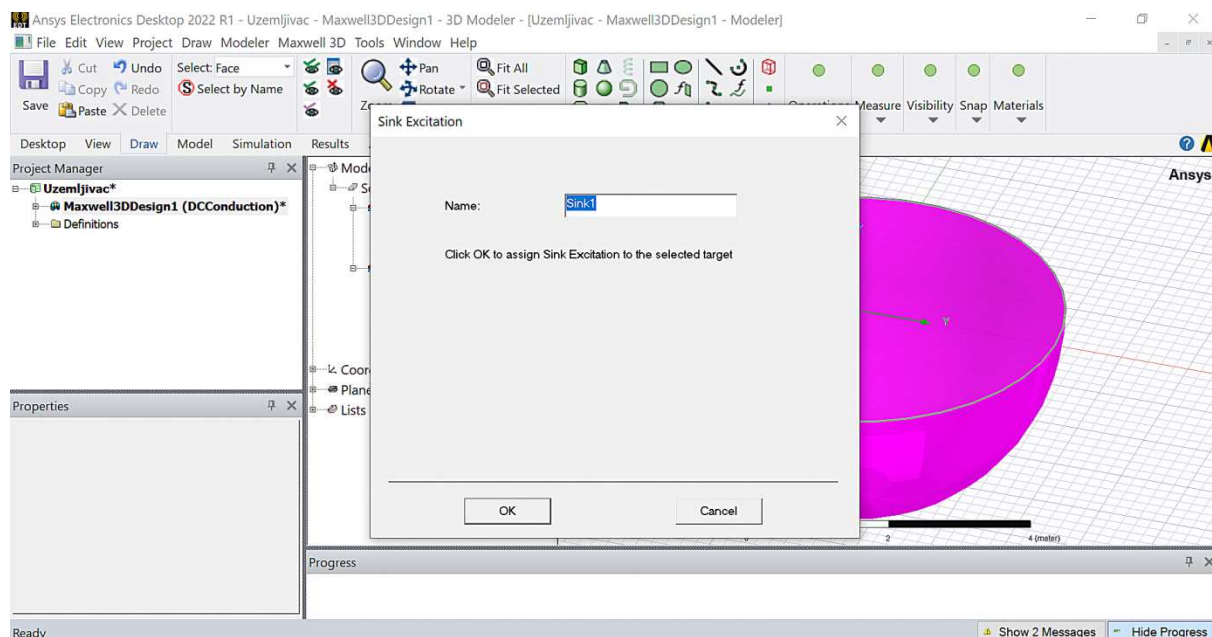


Slika 9.31 Parametri strujne pobude uzemljivača.

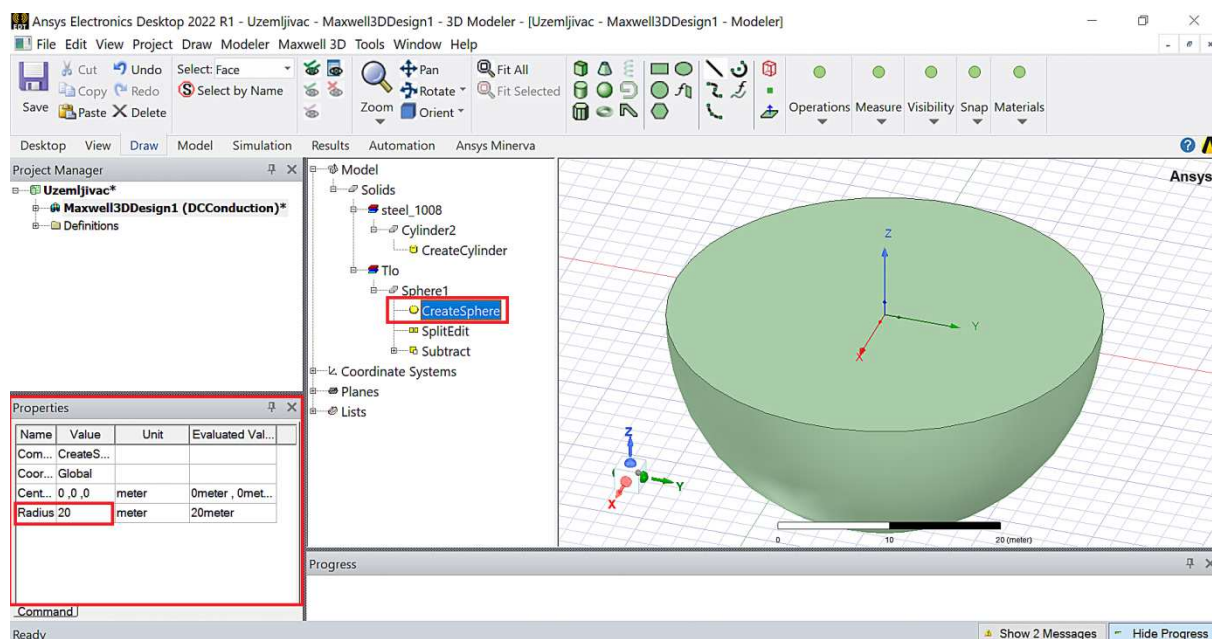


Slika 9.32 Pridruživanje strujnog uvora (engl. *Current Sink*) plaštu polukugle (modelu tla).

Nakon izbora strujnog uvora (engl. *Sink*) pojavljuje se prozor u kojemu je moguće promijeniti naziv strujnog uvora (slika 9.33). Prethodno je pri crtanju kugle, koja je kasnije pretvorena u polukuglu, njezin radijus namjerno postavljen na nešto veći iznos od duljine cjevastog uzemljivača. To je učinjeno kako bi se lakše vidjele obje geometrije istovremeno. Radijus kugle kojom je modelirano tlo potrebno je povećati na iznos koji je barem deset puta veći od duljine uzemljivača. To se obavlja na način da se u polju modela odabere „*Create Sphere*“, što uzrokuje pojavu polja „*Properties*“ u kojem se radijus kugle postavi na 20 m (slika 9.34).

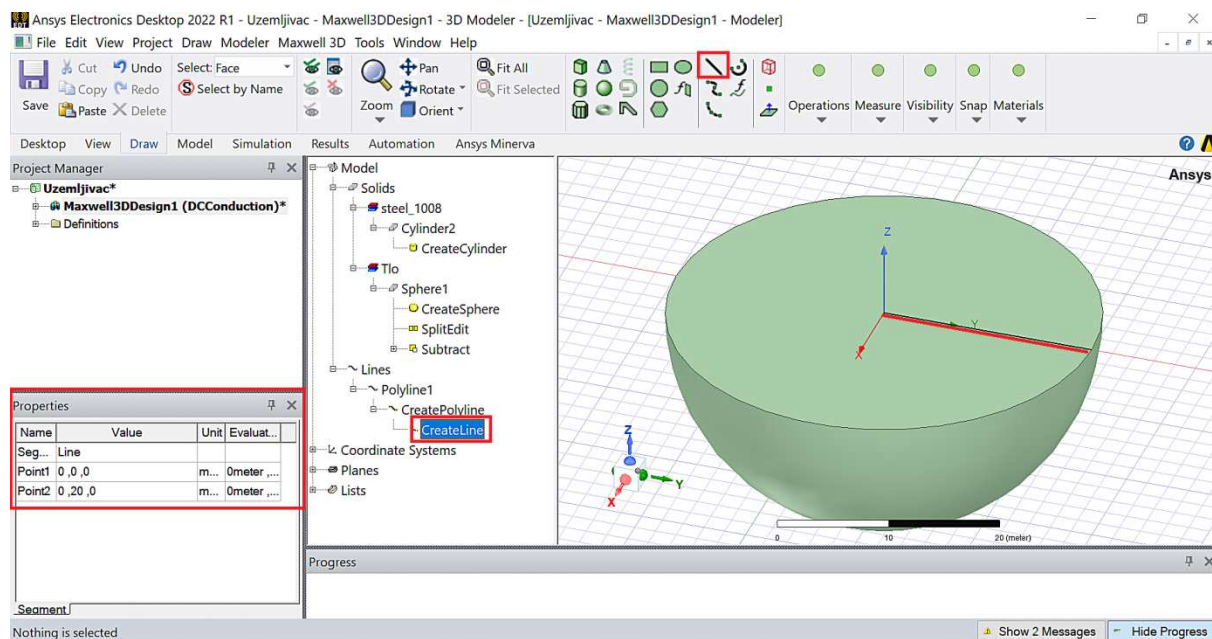


Slika 9.33 Prozor u kojemu je moguće promijeniti naziv strujnog izvora.

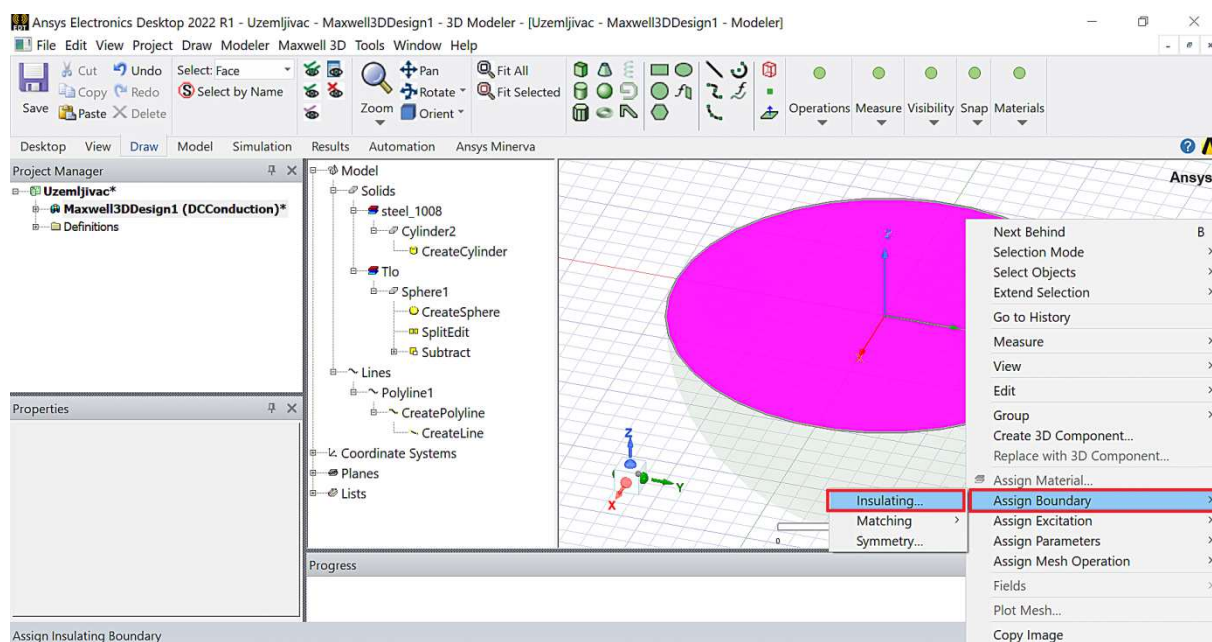


Slika 9.34 Nove dimenzije tla (20 m radijus polukugle).

Jedan je od načina na koji se rezultati numeričkog proračuna mogu grafički prikazati duž određene krivulje. U ovom primjeru bit će odabran ravni segment koji se proteže od središta koordinatnog sustava duž y osi pa do ruba tla. U tu svrhu, potrebno je odabrati geometriju pod nazivom „Polyline“ te nacrtati segment pravca od središta koordinatnog sustava duž y osi do ruba tla kao što je prikazano slikom 9.35. Nakon klika na „Create Line“ u polju modela, svojstva nacrtanog segmenta mogu se vidjeti i promijeniti polju „Properties“ (slika 9.35). Sljedi zadavanje rubnog uvjeta gornjoj plohi polukugle kojom je modelirano tlo (slika 9.36).

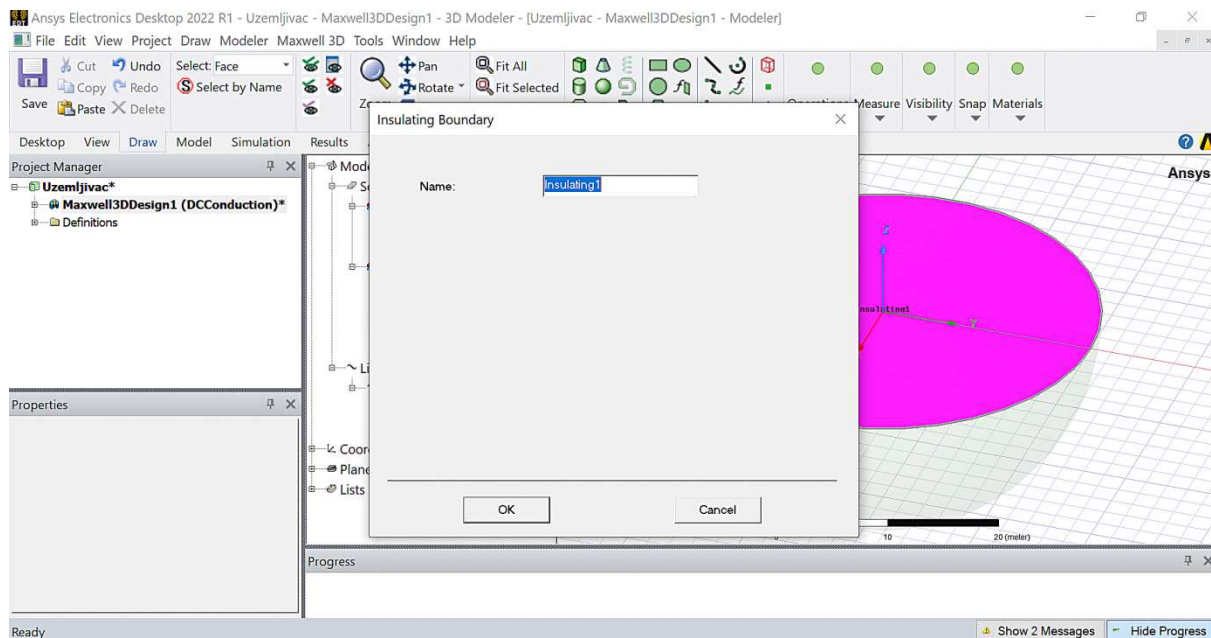


Slika 9.35 Izbor krivulje „Polyline“, nacrtan segment pravca duž y osi i parametri segmenta.

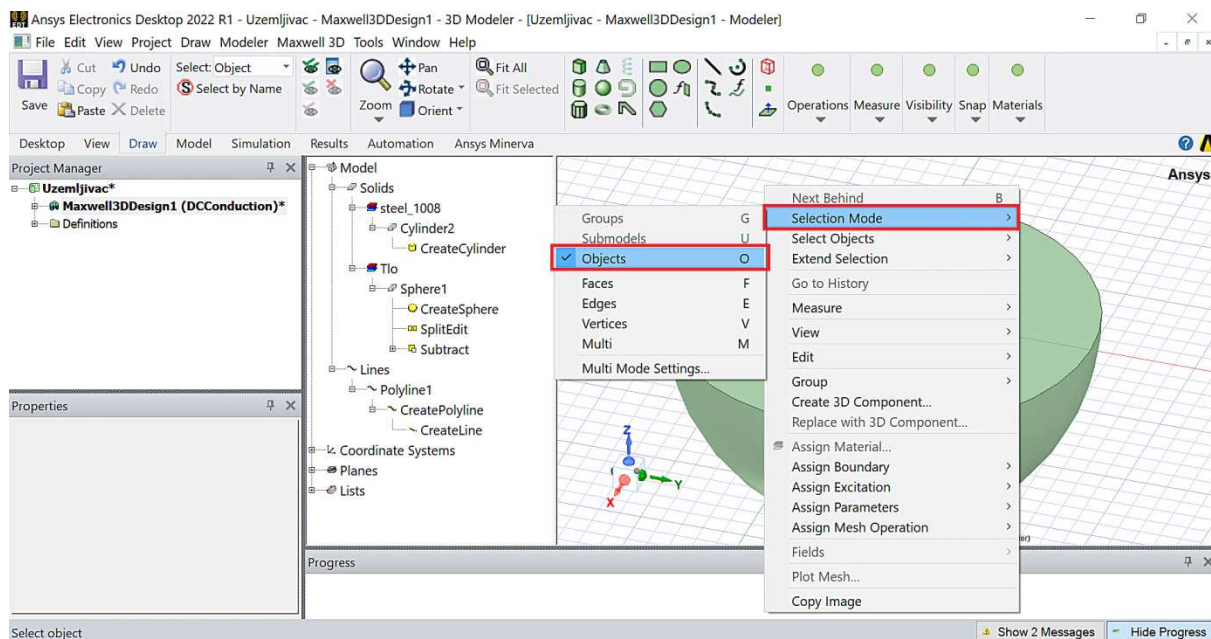


Slika 9.36 Pridruživanje rubnih uvjeta gornjoj plohi tla.

Nakon što se odabere rubni uvjet pod nazivom „*Insulating*“ pojavljuje se prozor u kojemu je moguće promijeniti njegov naziv (slika 9.37). Naredni je korak definiranje segmentacije kojom se dobivaju konačni elementi. Kako bi se odabrala geometrijska tijela koja će biti segmentirana potrebno je promijeniti način selekcije „*Selection Mode*“ u objekte postupkom prikazanim na slici 9.38.

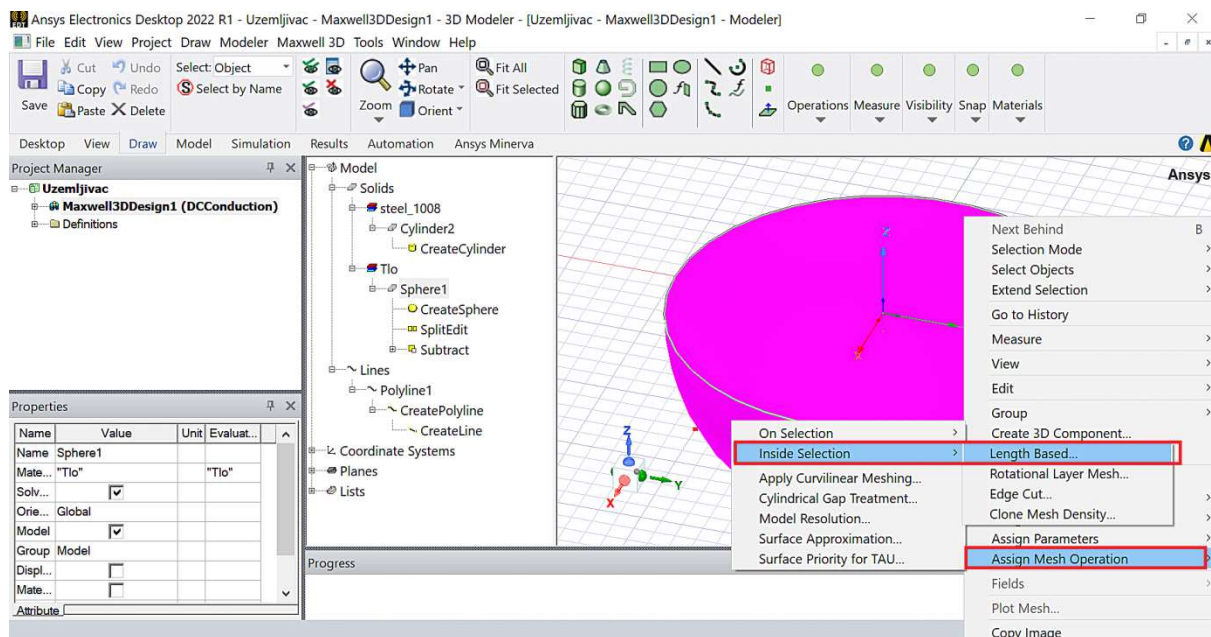


Slika 9.37 Prozor u kojemu je moguće promijeniti naziv rubnog uvjeta.

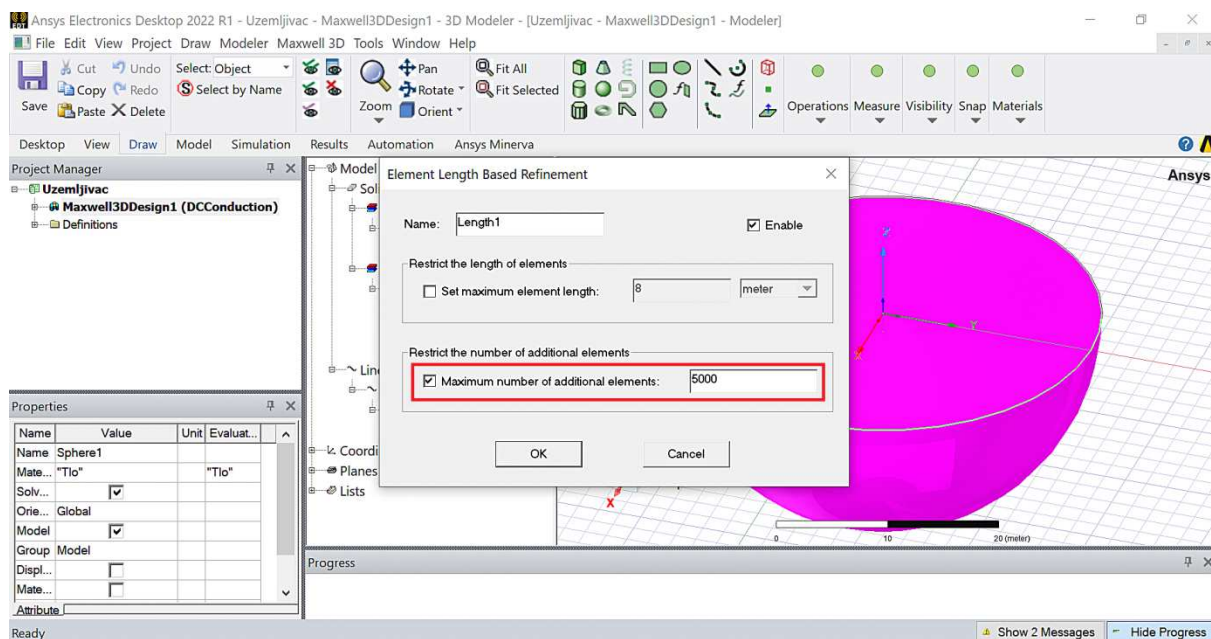


Slika 9.38 Promjena načina selektiranja u geometrijske objekte.

Nakon što je promijenjen način selektiranja u objekte moguće je mišem odabrati cijelu geometriju modela koja se sastoji od tla i uzemljivača, što je prikazano slikom 9.39. Desnim klikom miša otvara se izbornik u kojemu je potrebno odabrati opciju „Assign Mesh Operation“ zatim „Inside Selection“ te „Length Based“ kao što je prikazano slikom 9.39. Zatim se otvara prozor u kojemu je moguće definirati maksimalnu duljinu konačnih elemenata ili maksimalni broj dodatnih elemenata. Što je veći broj elemenata, to je rezultat točniji, ali je trajanje izračuna dulje. Radi navedenog, kao kompromisno rješenje između točnosti i trajanja simulacije, potrebno je postaviti vrijednosti kako je prikazano slikom 9.40.

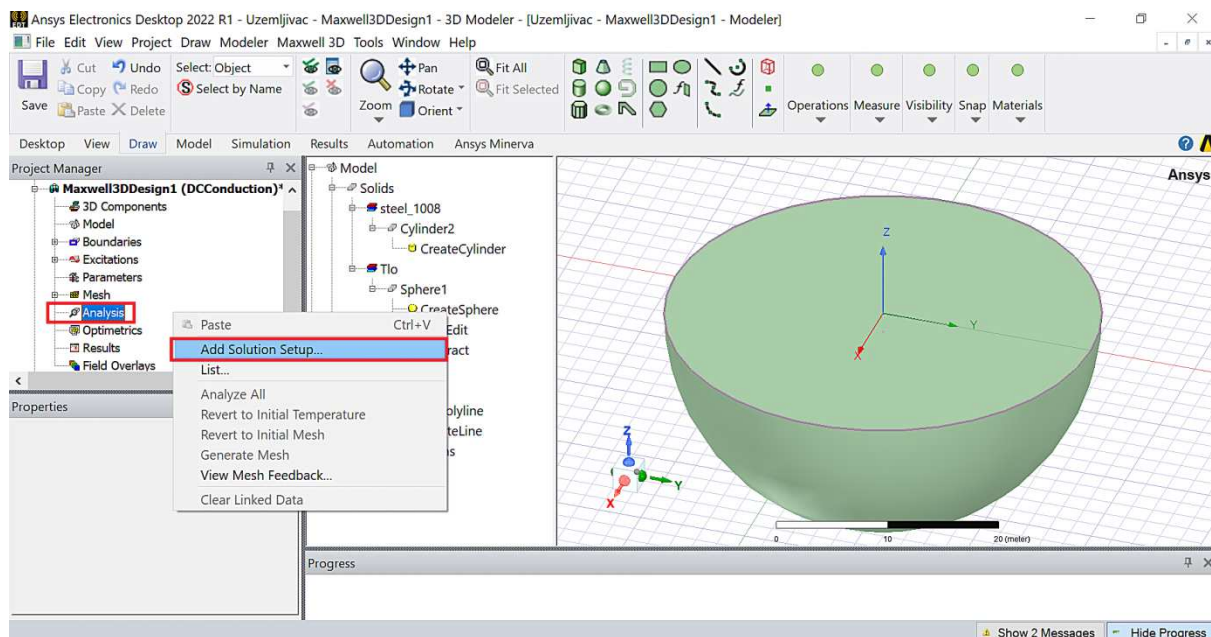


Slika 9.39 Pridruživanje mreže „Mesh Operation“ odabranoj geometriji.

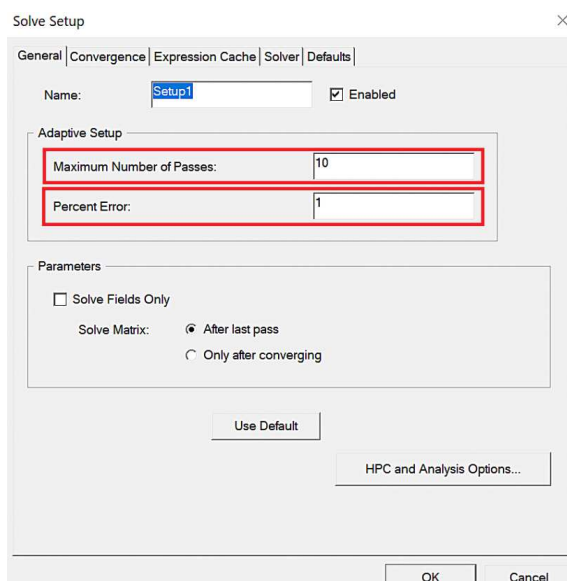


Slika 9.40 Definiranje maksimalne duljine i broja elemenata.

Prije pokretanja simulacije u programskom paketu Ansys potrebno je postaviti parametre simulacije (broj iteracija i postotna pogreška). Navedeno se obavlja desnim klikom miša u polju pod nazivom „Project Manager“ na opciji pod nazivom „Analysis“, nakon čega se pojavljuje izbornik u kojemu treba odabrati opciju „Add Solution Setup“ (slika 9.41). Nakon izbora opcije „Add Solution Setup“ pojavljuje se prozorčić kako je prikazano na slici 9.42. Ovisno o vrsti simulacije i željenoj točnosti, zadane vrijednosti parametara simulacije mogu se promijeniti.

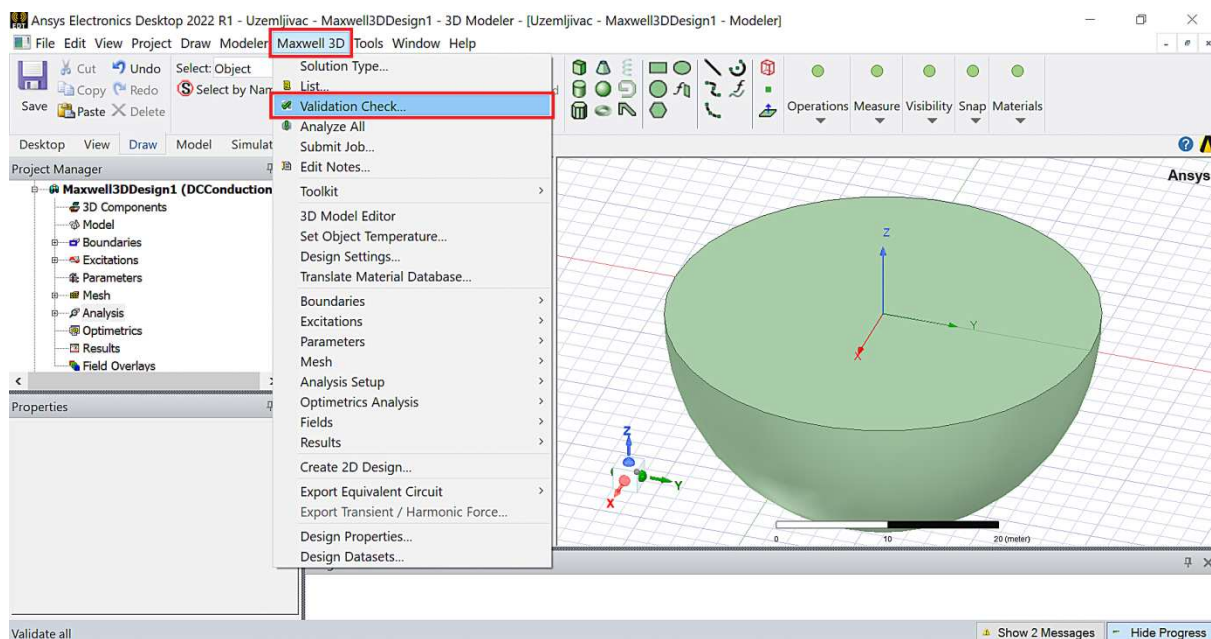


Slika 9.41 Izgled glavnog prozora nakon desnog klika miša na opciju „Analysis“.

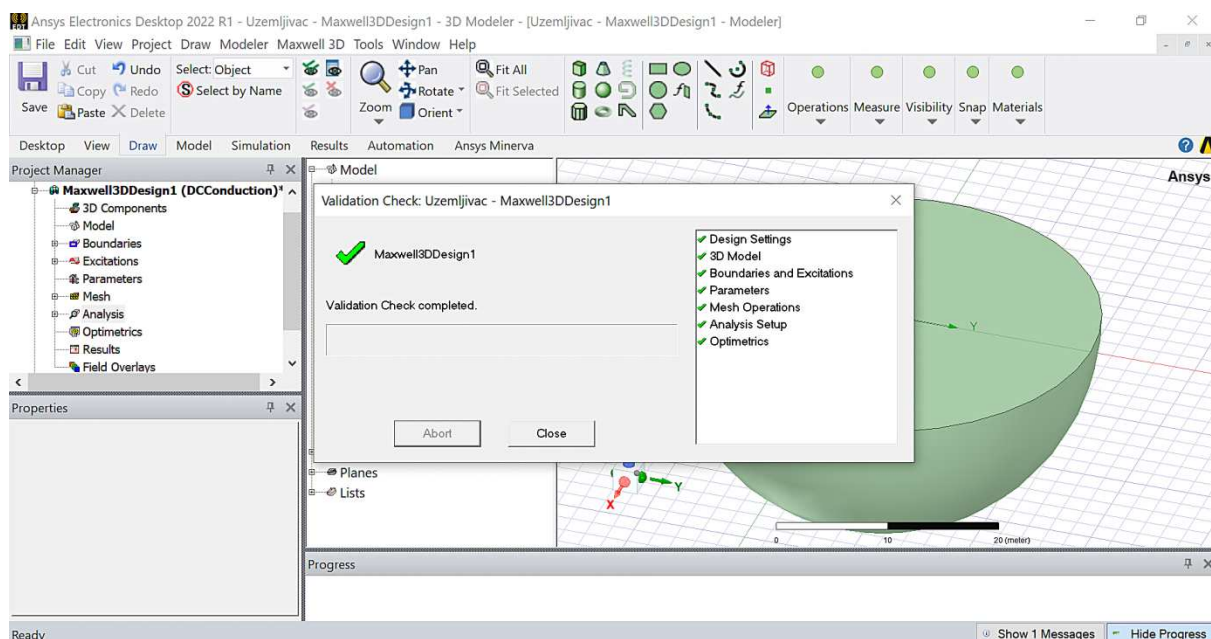


Slika 9.42 Prozor u kojemu se zadaju parametri simulacije.

Posljednji korak prije pokretanje simulacije, odnosno numeričkog proračuna jest provjera stavki vezanih uz model. Navedeno se obavlja klikom na „Maxwell 3D“, zatim na opciju „Validation Check“ (slika 9.43). Nakon navedenog, program će provjeriti postavke dizajna, valjanost modela, rubne uvjete i pobude, postavke analize itd. Ukoliko je sve u redu, pojavit će se zelena kvačica ispred svake od navedenih stavki kao što je to prikazano slikom 9.44.

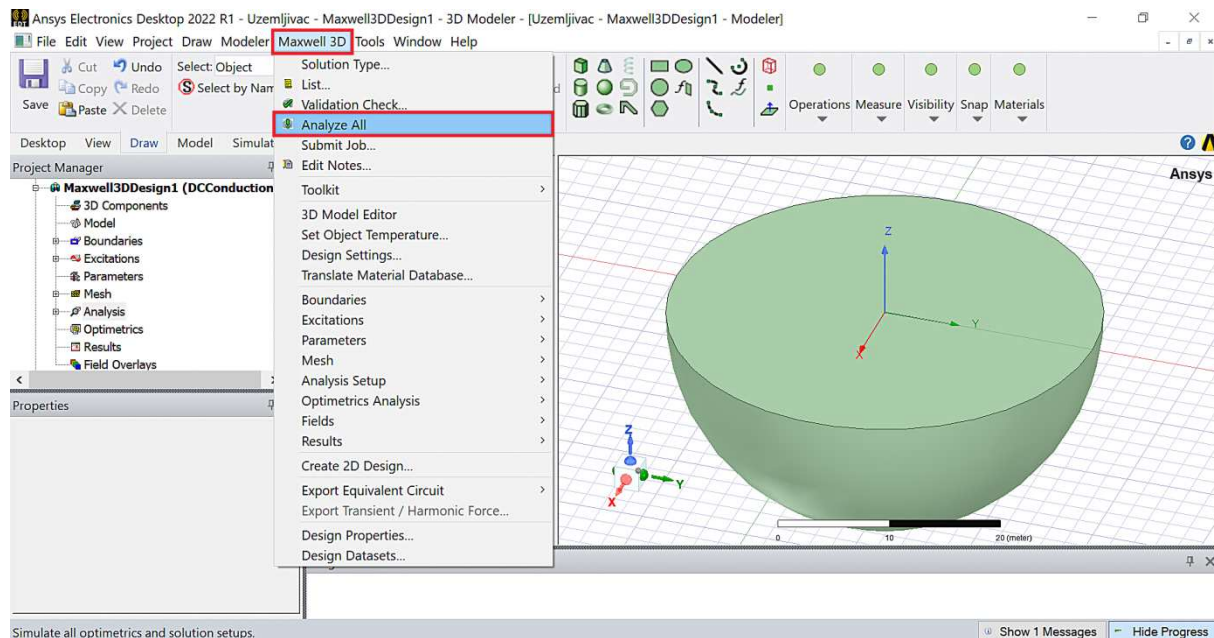


Slika 9.43 Izbor opcije provjere stavki vezanih uz model.

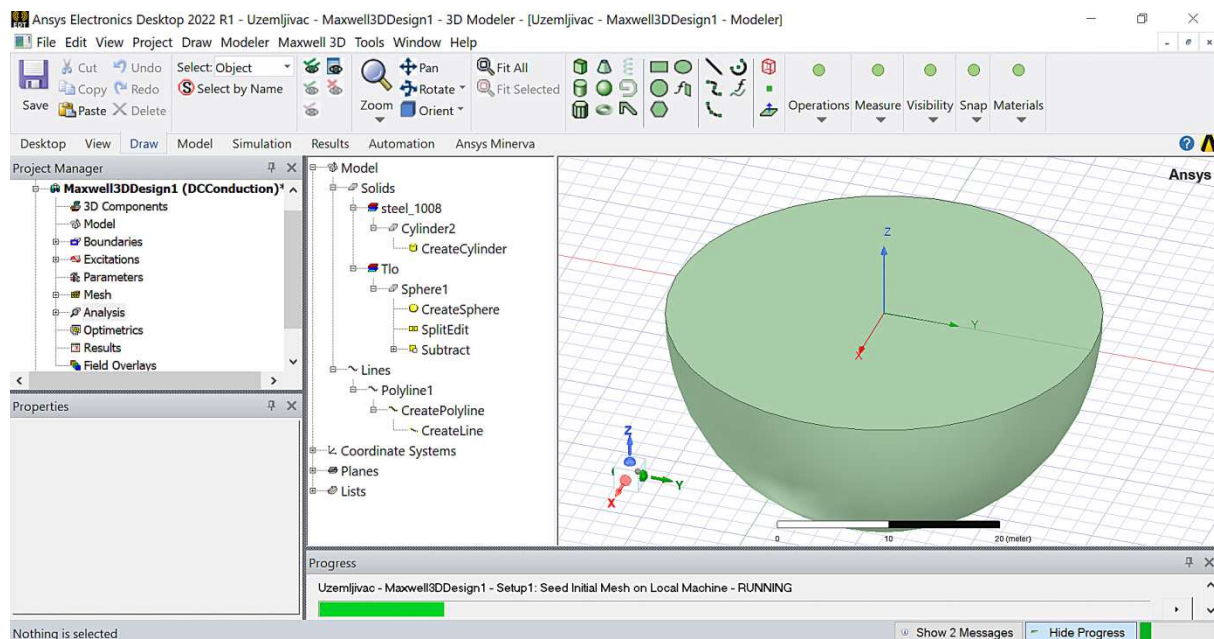


Slika 9.44 Izgled prozora nakon provjere svih stavki vezanih uz model.

Nakon što je utvrđeno da su sve stavke vezane uz model valjane može se pokrenuti numerički proračun. Pokretanje numeričkog proračuna obavlja se klikom miša na „*Maxwell 3D*“, zatim na opciju „*Analyze All*“ kao što je to prikazano slikom 9.45. Nakon što se pokrene numerički proračun primjenom metode konačnih elemenata, potrebno je neko vrijeme da se on obavi. Pojedine faze u odvijanju proračuna, kao i razina njihova izvršenja, vidljiva je na dnu prozora u polju pod nazivom „*Progress*“ (slika 9.46).

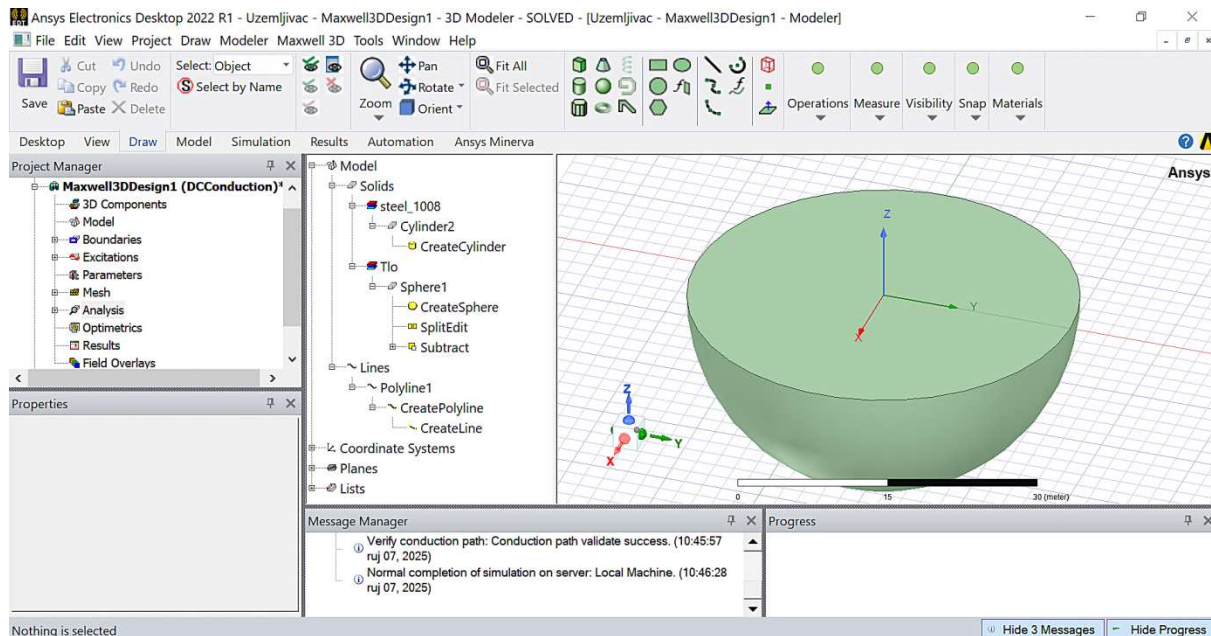


Slika 9.45 Zadavanje naredbe za pokretanje numeričkog proračuna.

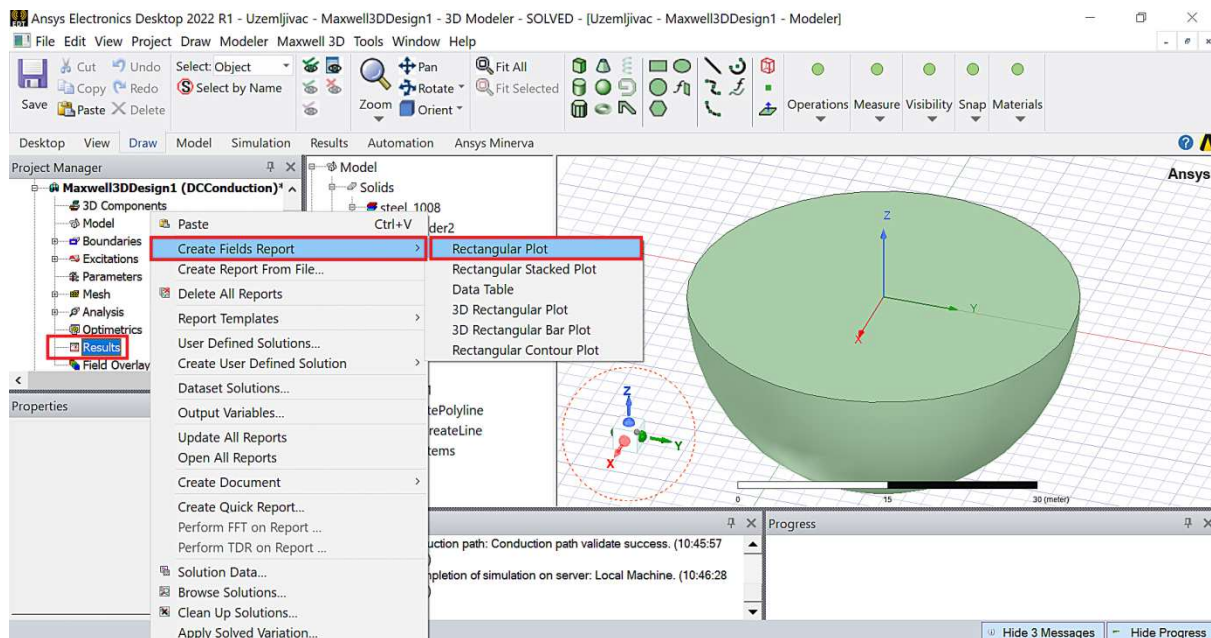


Slika 9.46 Polje „*Progress*“ s osnovnim podacima vezanima za izvršavanje proračuna.

Nakon što numerički proračun završi, na dnu glavnog prozora pojavljuje se polje „*Message Manager*“ u kojemu su navedeni osnovni podaci o provedenom proračunu (slika 9.47). U narednom koraku bit će prikazan jedan od načina prikaza rezultata proračuna. U polju „*Project Manager*“ odabere se stavka „*Results*“ te se nakon desnog klika miša otvara izbornik u kojemu se bira opcija „*Create Field Report*“, a zatim opcija „*Rectangular Plot*“ (slika 4.48).

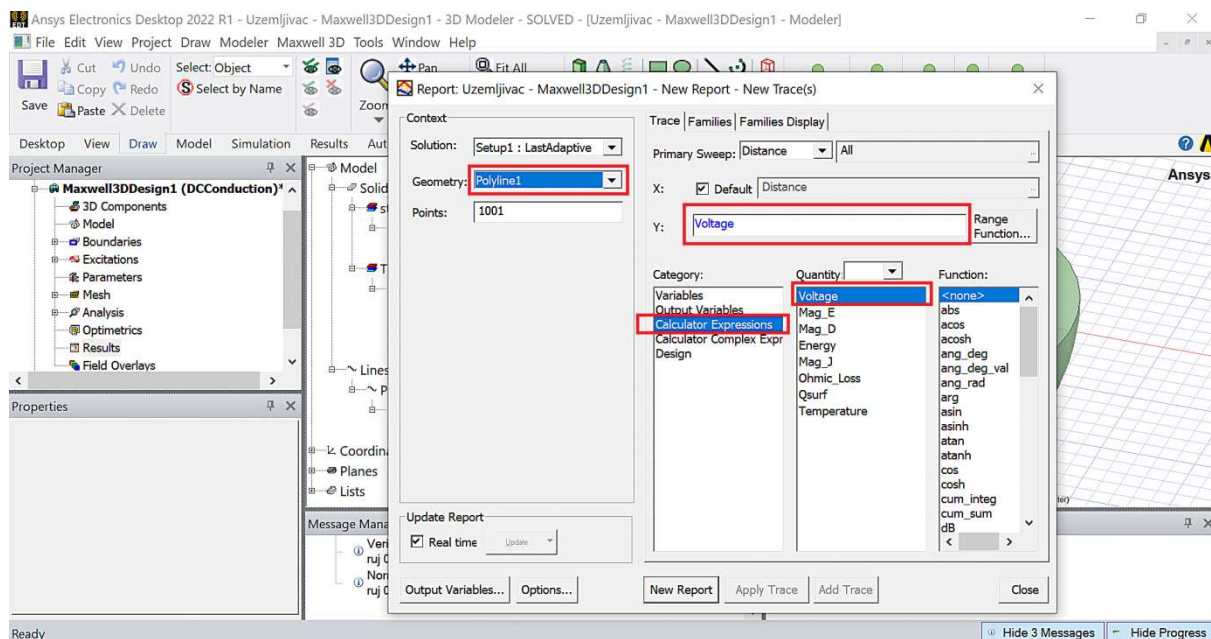


Slika 9.47 Glavni prozor i polje „*Message Manager*“ s osnovnim podacima o proračunu.

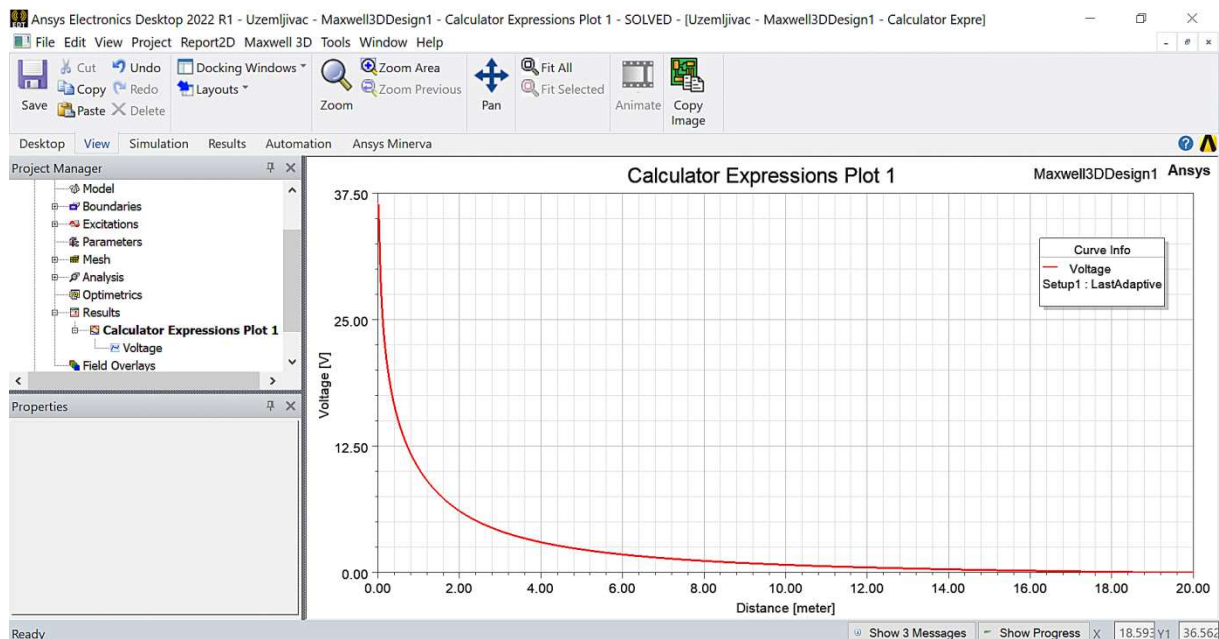


Slika 9.48 Izbor opcije prikaza rezultata pomoću opcije „*Rectangular Plot*“.

Nakon provedenih prethodno opisanih koraka otvara se prozor u kojemu je moguće odabrati fizikalnu veličinu čiji se grafički prikaz želi, geometriju duž koje se želi prikazati iznos odabrane fizikalne veličine te broj točaka. U ovom primjeru želi se prikazati promjena napona duž geometrije pod nazivom „Polyline1“, što se postiže izborima označenim crvenim pravokutnicima na slici 9.49. Nakon potvrde prethodnog izbora pojavljuje se grafički prikaz promjene napona duž odabranog segmenta pod nazivom „Polyline1“ (slika 9.50).

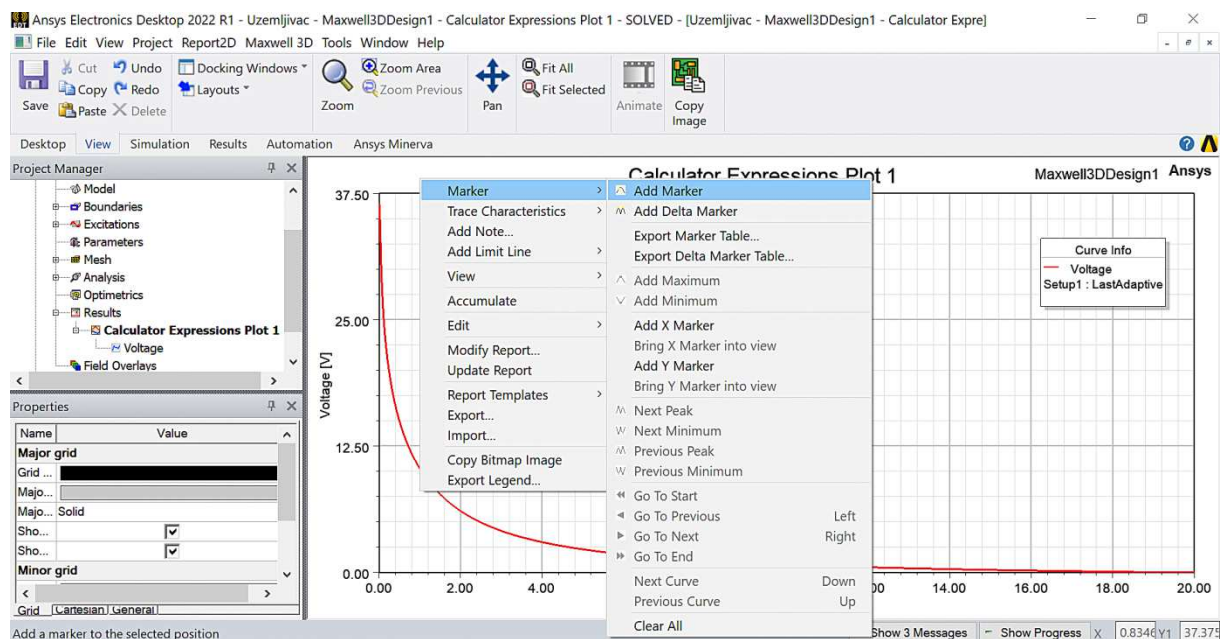


Slika 9.49 Postavke za prikaz napona duž segmenta „Polyline1“.

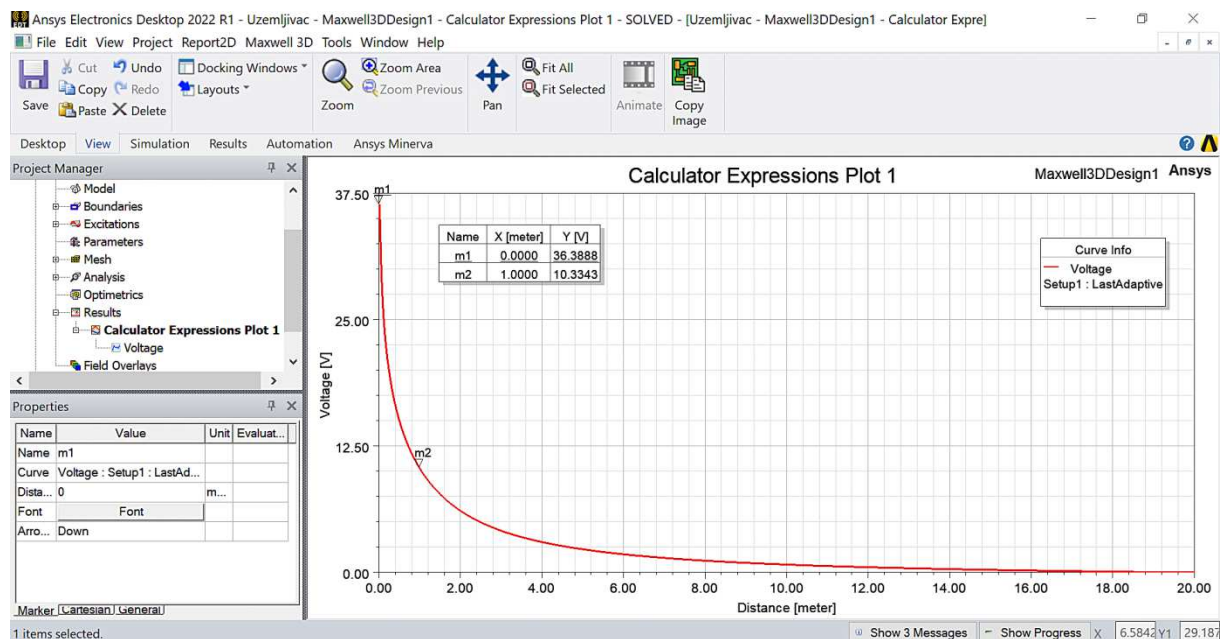


Slika 9.50 Promjena napona duž segmenta „Polyline1“.

U nekim je slučajevima poželjno pojedine točke na grafičkom prikazu označiti. Označavanje točaka na grafičkom prikazu provodi se korištenjem različitih vrsta markera. Na željenoj točki grafičkog prikaza, gdje se želi dodati oznaka, nakon desnog klika miša otvara se izbornik u kojemu se prvo bira opcija „Marker“, a zatim opcija „Add Marker“ (slika 9.51). Ukupan je broj oznaka (markera) koji se mogu dodati proizvoljan. U ovom primjeru dodane su oznake na pozicijama ($x=0$ i $x=1$ m), što je prikazano slikom 9.52.

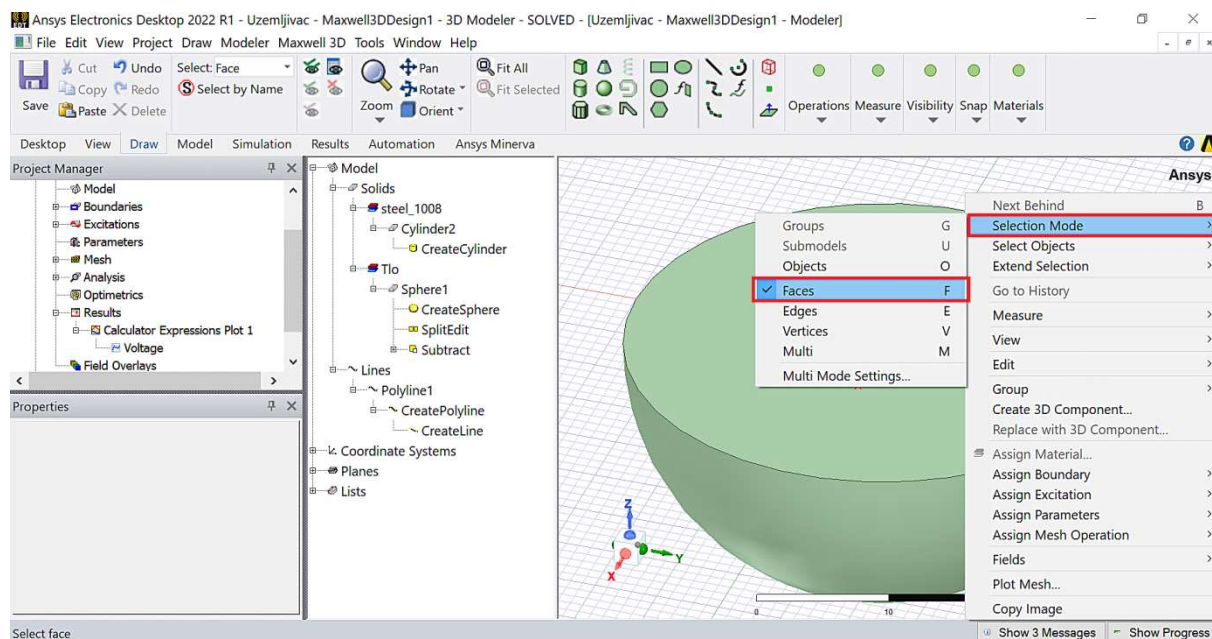


Slika 9.51 Postupak dodavanja oznaka (markera) na grafički prikaz.

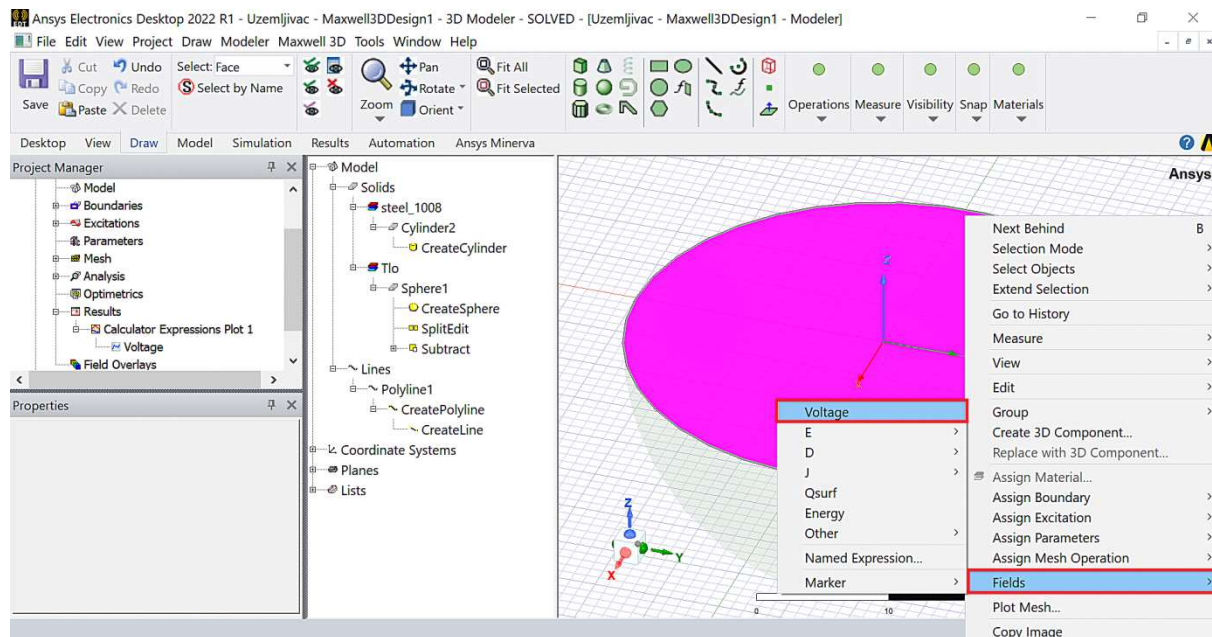


Slika 9.52 Oznake (markeri) na pozicijama $x=0$ m i $x=1$ m.

Rezultate proračuna moguće je prikazivati i duž ploha. U ovom primjeru korisno je vidjeti kako se napon mijenja duž površine tla. Kako bi se za prikaz rezultata odabrala gornja ploha tla potrebno je promijeniti način selekcije miša (engl. *Selection Mode*) s prethodno zadanih objekata na lica (engl. *Faces*) na način kako je to prikazano slikom 9.53. Nakon toga moguće je selektirati gornju plohu tla kako je to prikazano slikom 9.54. Desnim klikom miša otvara se izbornik u kojemu je potrebno odabrati opciju „*Fields*“ te zatim opciju „*Voltage*“.

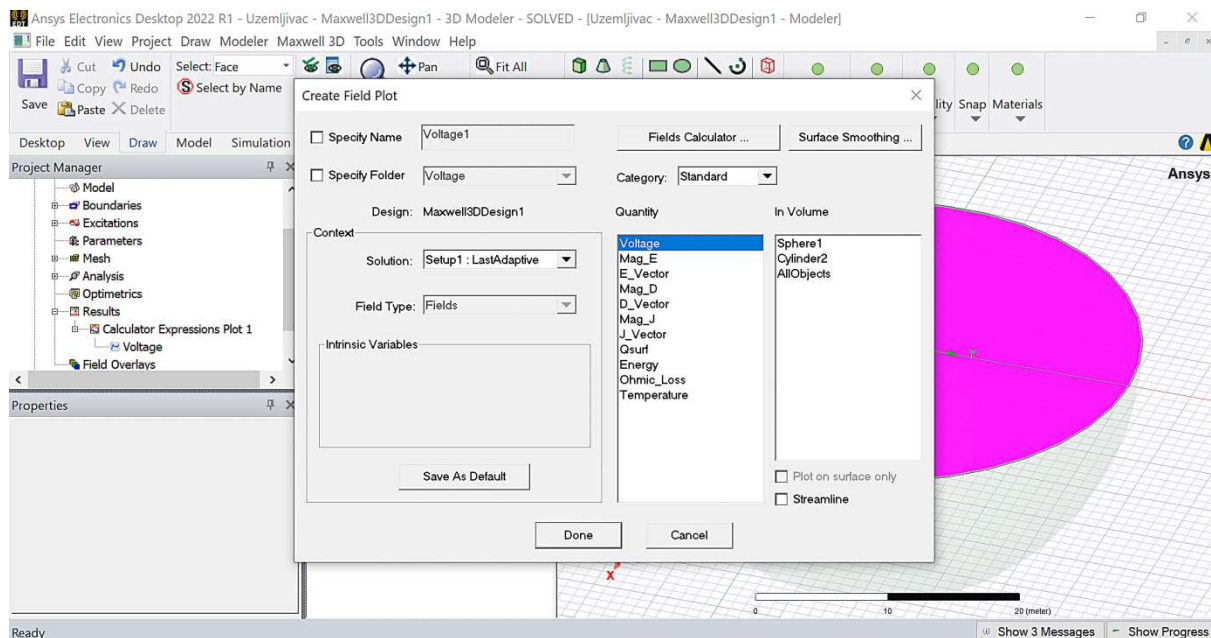


Slika 9.53 Promjena selekcije s objekata na lica (engl. *Faces*)

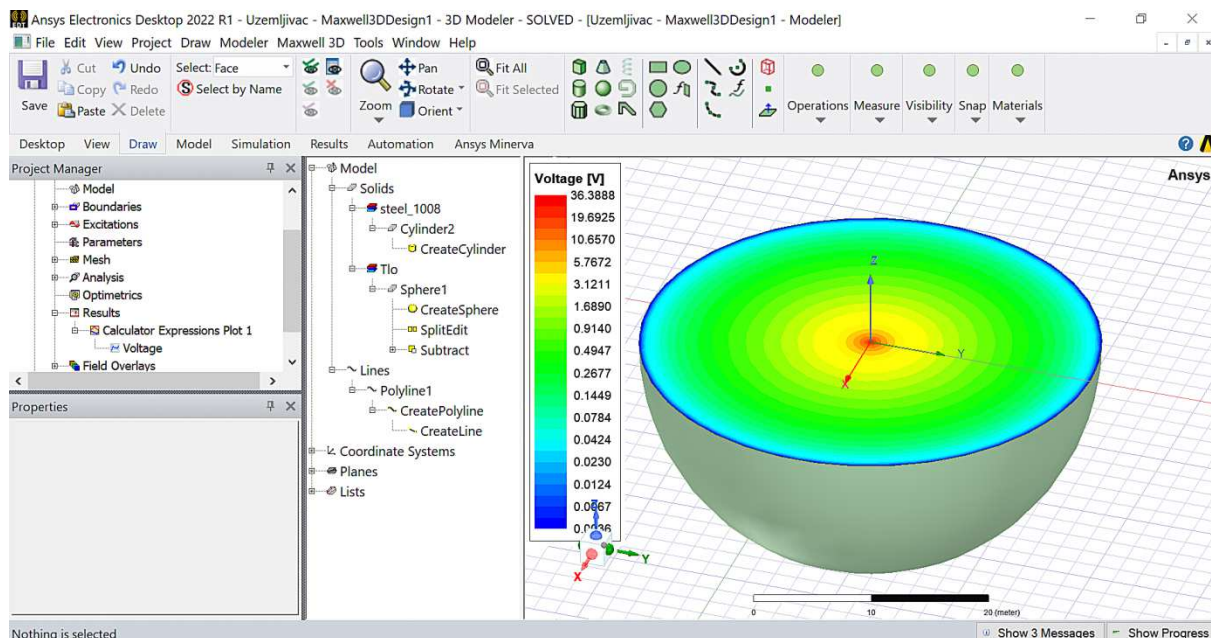


Slika 9.54 Selekcija gornje plohe tla i izbor prikaza napona duž te plohe.

Nakon izbora gornje plohe tla moguće je kreirati „Field Report“ za tu plohu. Za izbor prikaza napona, u prozoru pod nazivom „Create Field Report“ potrebno je odabrati opciju „Voltage“ (slika 9.55). Nakon što se potvrdi izbor klikom na tipku „Done“ pojavljuje se kolor kodirani grafički prikaz napona na gornjoj plohi (površini) tla, odnosno skalarno polje napona (slika 9.56).

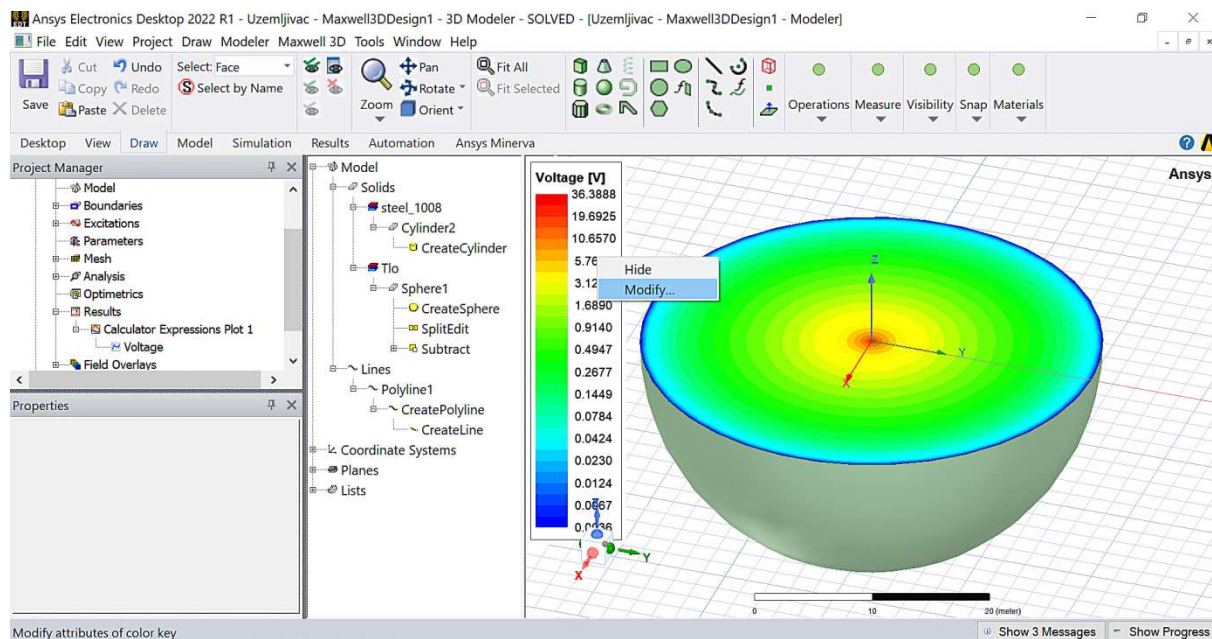


Slika 9.55 Izbor napona (engl. *Voltage*) za prikaz duž gornje plohe tla.

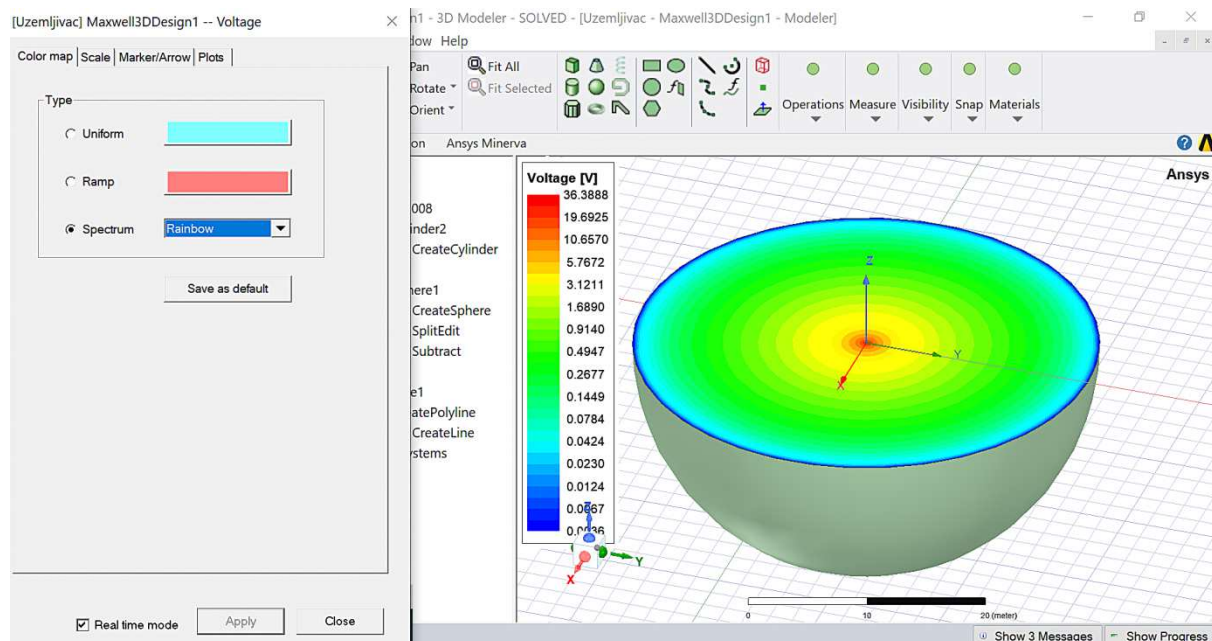


Slika 9.56 Kolor kodirani grafički prikaz napona na površini tla.

Korisnik ima mogućnost prilagoditi kolor kodirani grafički prikaz prema svojim preferencijama. Skala može biti linearna ili logaritamska, a kolor kodiranje brojčanih vrijednosti prema različitim obrascima. Postupak prilagodbe grafičkog prikaza obavlja se izborom opcije „Modify“ (slika 9.57) nakon čega se pojavljuje prozorčić (slika 9.58) u kojemu je vidljiva trenutno postavljena mapa boja „Color Map“ te dodatne opcije za prilagodbu grafičkog prikaza „Scale, Marker/Arrow, Plots“.

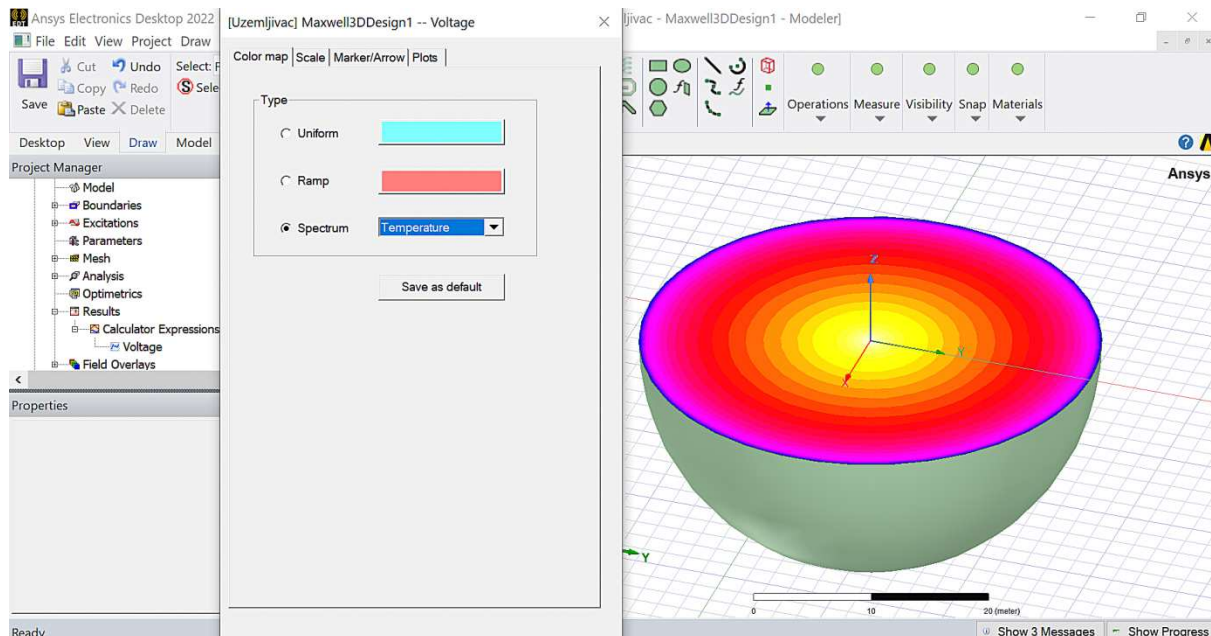


Slika 9.57 Izbor opcije modificiranja grafičkog prikaza.

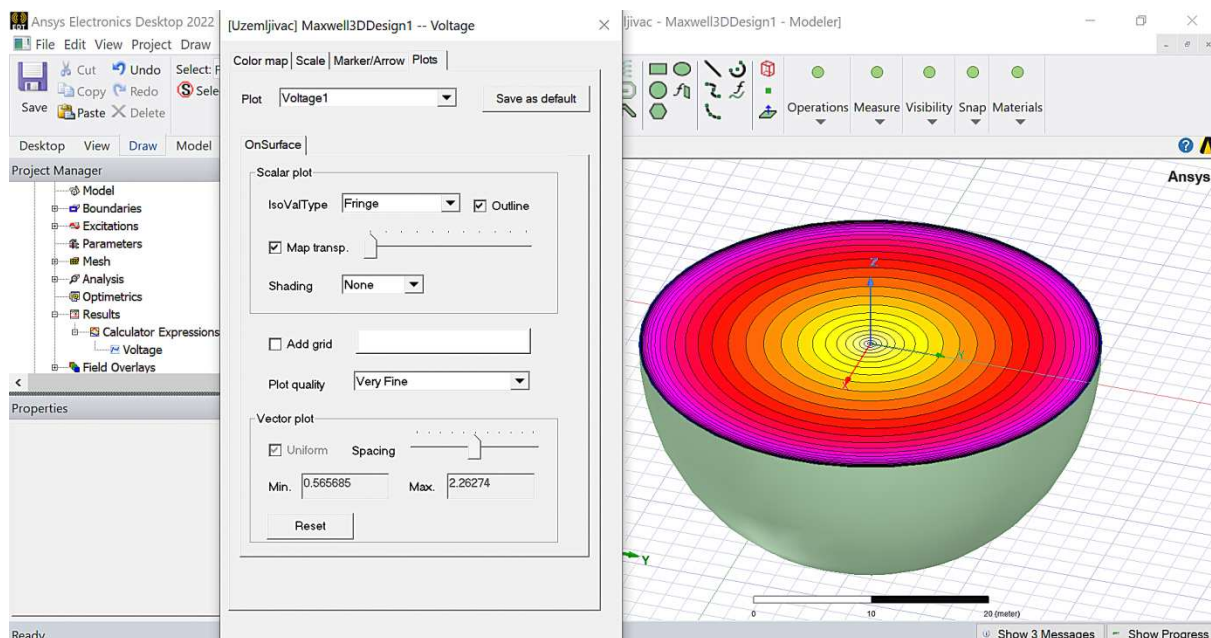


Slika 9.58 Promjena mape boja „Color Map“ kojom su kodirane brojčane vrijednosti.

Za primjer, neka je odabrana mapa boja pod nazivom „Temperature“. Tada će grafički prikaz skalarnog polja napona na površini tla izgledati kao što je prikazano na slici 9.59. Grafički prikaz skalarnog polja napona na površini tla može se dodatno prilagoditi dodavanjem obrubnih krivulja koje se nalaze pod opcijom „Fringe“ (slika 9.60). U ovom će slučaju imati značenje ekvipotencijalnih krivulja.



Slika 9.59 Izbor mape boja pod nazivom „Temperature“.



Slika 9.60 Prilagodba grafičkog prikaza izborom obrubnih krivulja, opcija „Fringe“.


Analiza rezultata

Modelirani vertikalni cjevasti uzemljivač ukopan je u homogeno tlo otpornosti $\rho=100 \Omega\text{m}$. Uzemljivač ima dimenzije promjer $\Phi=5 \text{ cm}$ ($R=2,5 \text{ cm}$) i duljinu $L=2 \text{ m}$. Prema izloženoj teoriji u teorijskom dijelu ovog priručnika (peto poglavlje), ovaj uzemljivač ima otpor rasprostiranja koji, prema izrazu (5-39), iznosi $37,96 \Omega$. Pri modeliranju ovog uzemljivača u programskom paketu Ansys, u gornju bazu cilindra kojim je predstavljen uzemljivač, utisnuta je struja iznosa jedan amper ($I=1 \text{ A}$). Prema slici 9.52, napon na poziciji uzemljivača (marker „m1“) iznosi $36,388 \text{ V}$. Kako je otpor rasprostiranja uzemljivača dan izrazom $R_u = \varphi_u / I$, gdje je φ_u potencijal uzemljivača u odnosu na referentnu daleku točku u prostoru na nultom potencijalu, a I struja koju uzemljivač odvodi u okolno tlo, može se iz numerički izračunatih podatka dobiti iznos otpora rasprostiranja koji iznosi $36,388 \Omega$. Dobiven je iznos u skladu s teorijskim predviđanjem iznosa otpora rasprostiranja.

Koristeći se dobivenim rezultatima prikazanim na slici 9.52, koliki bi bio napon koraka i napon dodira kada bi ovaj uzemljivač odvodio struju od 10 A u tlo?

Ovaj primjer modeliranja uzemljivača vrlo jednostavne geometrije odabran je iz didaktičko-metodičkih razloga. Iz tog razloga čitatelju možda nisu odmah očigledne prednosti korištenja programskog paketa Ansys u modeliranju uzemljivača. U slučajevima kada je geometrija uzemljivača znatno složenija i u slučajevima kada je tlo heterogeno prednosti korištenja programskog paketa Ansys postaju izraženije i očigledne.

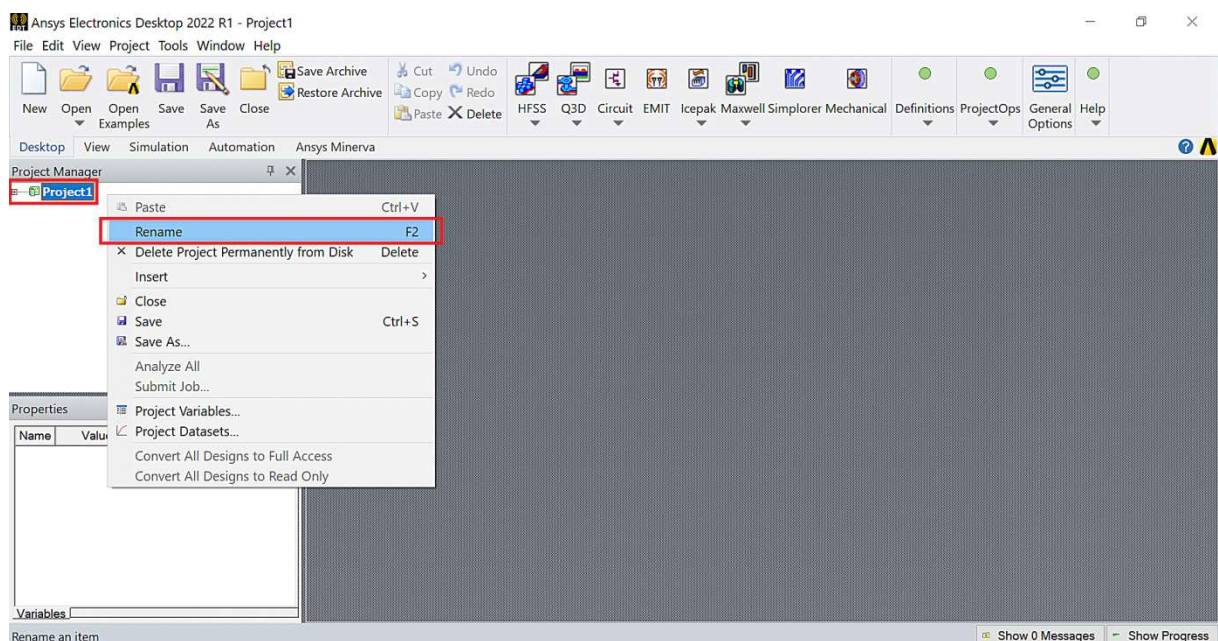
10. MODELIRANJE WENNEROVE METODE

Klikom na ikonu „“ programskog paketa Ansys na monitoru se pojavljuje pozdravni zaslon (engl. *Splash screen*) koji ima izgled kako je prikazano na slici 10.1.



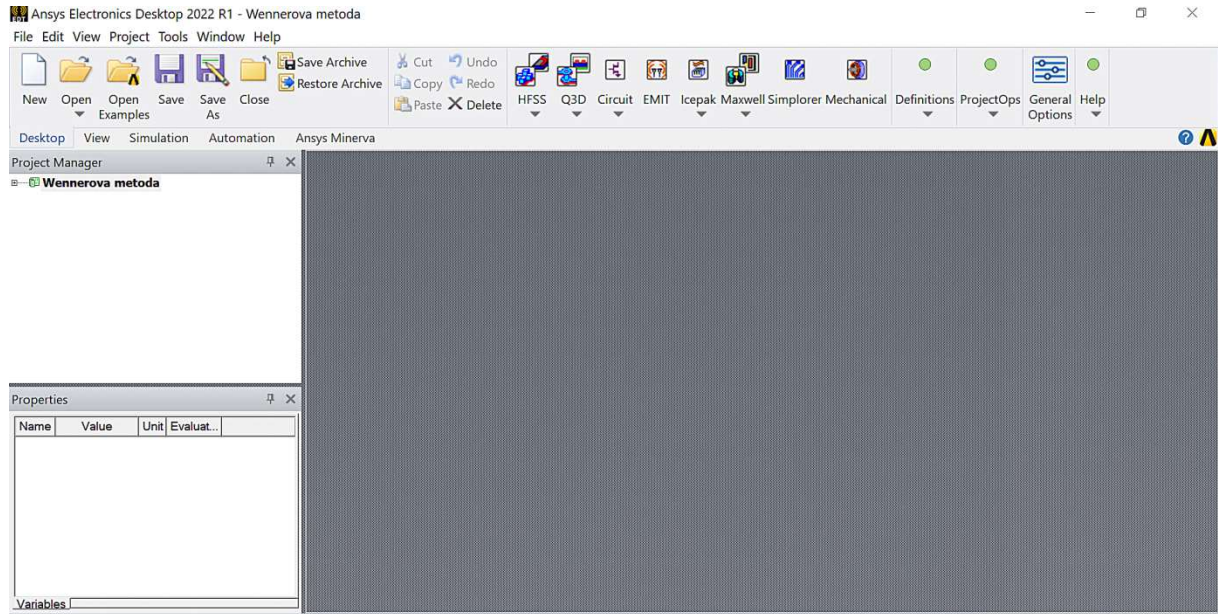
Slika 10.1 Pozdravni zaslon programskog paketa Ansys.

Učitavanje programskog paketa Ansys i njegovo povezivanje na mrežu je automatsko. Po završetku učitavanja i uspostave mreže, u svrhu provjere valjanosti licence, pojavljuje se glavni prozor programa kao na slici 10.2. Promjena imena projekta obavlja se desnim klikom miša na polju „*Project Manager*“ na trenutni naziv projekta koji glasi „*Project1*“, nakon čega se otvara opcija „*Rename*“ (slika 10.2). Klikom na opciju „*Rename*“ omogućava se imenovanje projekta po vlastitom izboru. Na primjer, neka je odabran naziv „*Wennerova metoda*“ kao što je prikazano na slici 10.3.



Slika 10.2 Promjena imena projekta u voditelju projekta „*Project Manager*“.

Nakon promjene naziva projekta, novi naziv vidljiv je u polju „*Project Manager*“ (slika 10.3). Za potrebe ove vježbe koristit će se programski modul „*Maxwell 3D*“ namijenjen za simulaciju i analizu elektromagnetskih zadaća na niskim frekvencijama. Izbor programskog modula „*Maxwell 3D*“ obavlja se na način kako je to prikazano slikom 10.4.



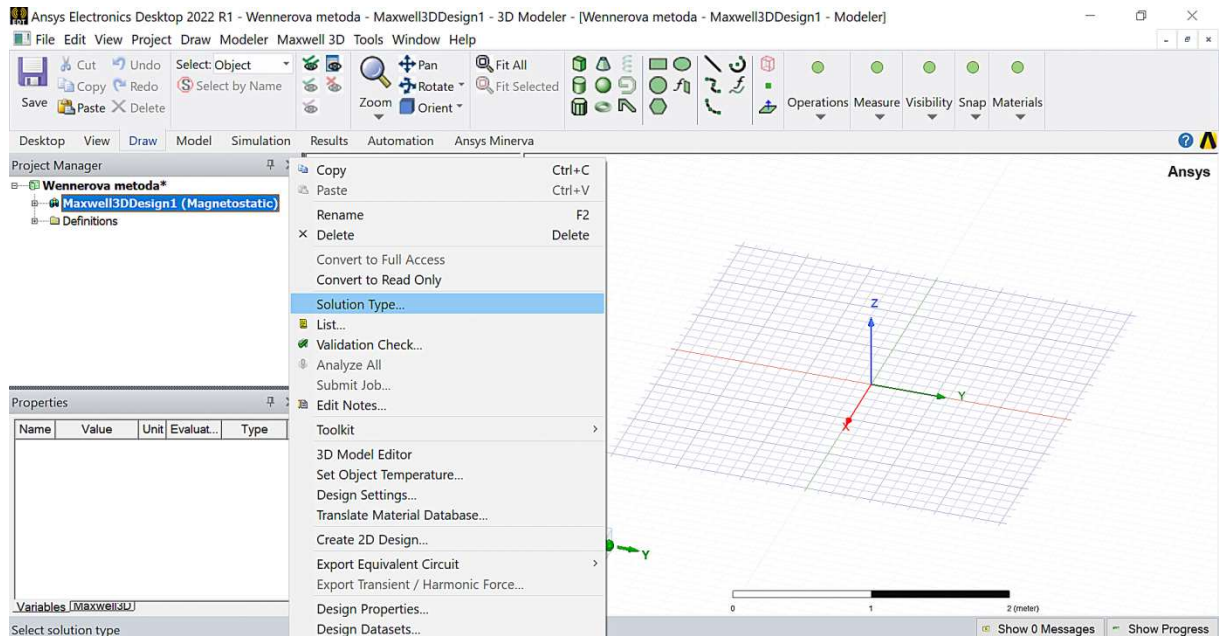
Slika 10.3 Izgled polja „*Project Manager*“ nakon promjene naziva projekta.



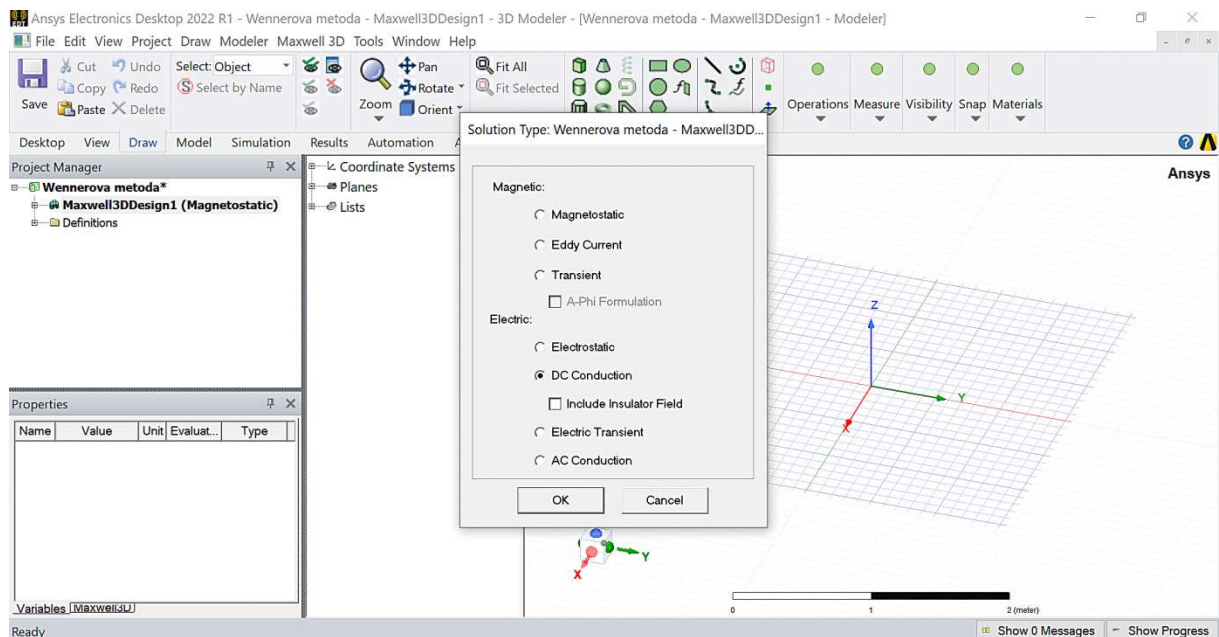
Slika 10.4 Izbor programskog modula „*Maxwell 3D*“.

Nakon izbora programskog modula „*Maxwell 3D*“, pojavljuje se prozor kao na slici 10.5. Programski modul „*Maxwell 3D*“ koristi visokospecijalizirane rješavače elektromagnetskih (EM) zadaća zasnovane na različitim skupovima Maxwellovih jednadžbi, odnosno različitim formulacijama EM polja za čije se rješavanje koristi metoda konačnih elemenata (MKE). Ovisno o tome za koju se vrstu EM zadaće želi ishoditi rješenje „*Solution Type*“, izbor rješavača EM polja nalazi se pod opcijom „*Solution Type*“ te se dijele na dva skupa pod nazivima „*Magnetic*“ i „*Electric*“. U skupu „*Magnetic*“ moguće je odabrati tri rješavača EM zadaće po nazivima „*Magnetostatic*“, „*Eddy Current*“ i „*Transient*“. U skupu „*Electric*“ moguće je odabrati tri rješavača EM zadaće po nazivima „*Electrostatic*“, „*DC Conduction*“ i „*Electric Transient*“. Ovisno o zadanim (unaprijed definiranim) postavkama programskog paketa Ansys pojavljuje se određeni unaprijed zadani rješavač EM zadaća.

Prema slici 10.5, trenutno je postavljeni rješavač elektromagnetskih zadaća za magnetostatiku (engl. *Magnetostatic*) te ga je potrebno promijeniti. Kako bi se promijenio rješavač EM zadaće, u „DC Conduction“ potrebno je odabrati opciju „Solution Type“, što se obavlja na način kako je prikazano na slici 10.5. Nakon izbora opcije „Solution Type“ pojavljuje se prozor u kojemu je moguće izabrati rješavač EM zadaće pod nazivom *DC Conduction*“ (slika 10.6). Nakon klika na tipku „OK“ prikazanu na slici 10.6 mijenja se rješavač EM zadaće, što se može vidjeti u polju „Project Manager“ (slika 10.7).

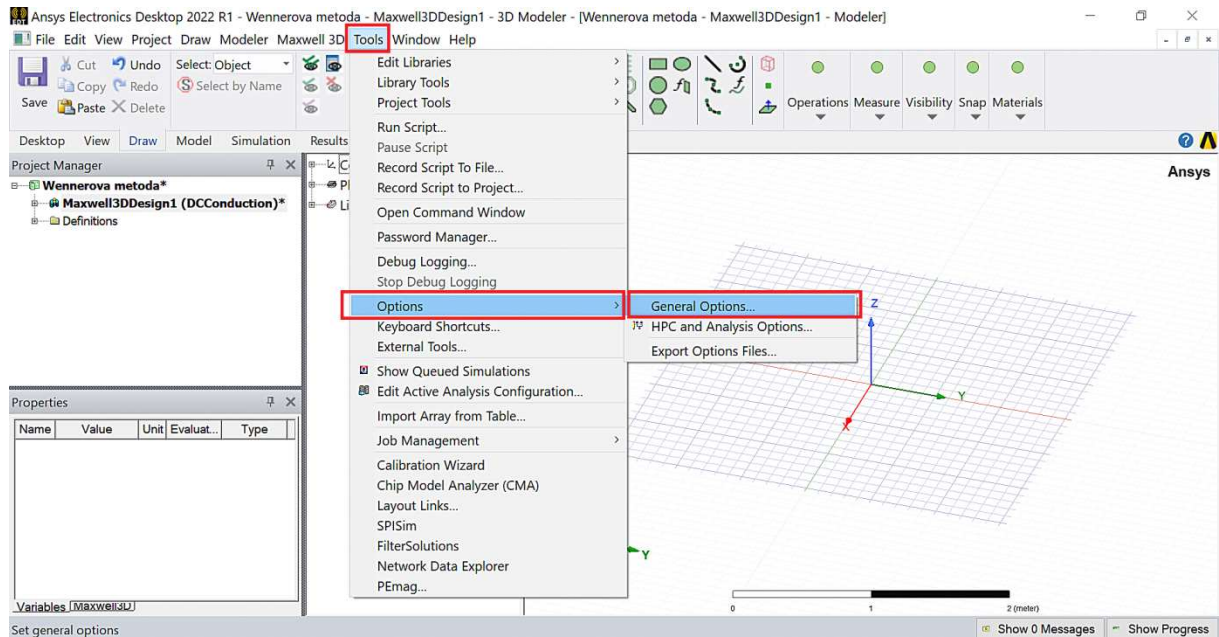


Slika 10.5 Polje „Project Manager“ u kojemu je vidljiv trenutno postavljen rješavač elektromagnetskih zadaća i odabir opcije „Solution Type“.

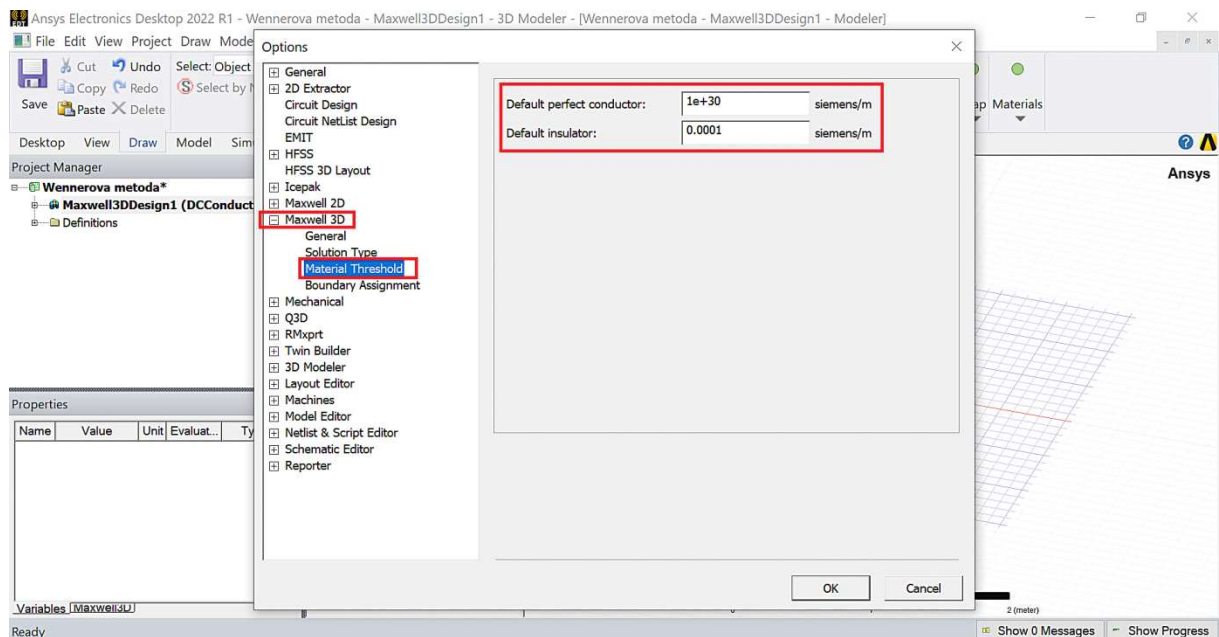


Slika 10.6 Izbor rješavača elektromagnetske zadaće „DC Conduction“.

Prije korištenja rješavača EM zadaje „DC Conduction” potrebno je provjeriti i, prema ukazanoj potrebi, definirati granice električne vodljivosti izražene u mjernim jedinicama S/m (Siemens po metru) pri kojima program smatra materijale izolatorima ili savršenim vodičima. Navedeno se postiže klikom na „Tools“, zatim „Option“ te „General Options“ kako je prikazano slikom 10.7. Nakon odabira „General Options“ otvara se izbornik (slika 10.8) u kojemu je potrebno odabrati rješavač EM zadaje „Maxwell 3D“ te opciju „Material Threshold“. Postaviti brojčane vrijednosti vodljivosti kojima su definirani pragovi za savršen vodič i izolator na iznose prikazane slikom 10.8.

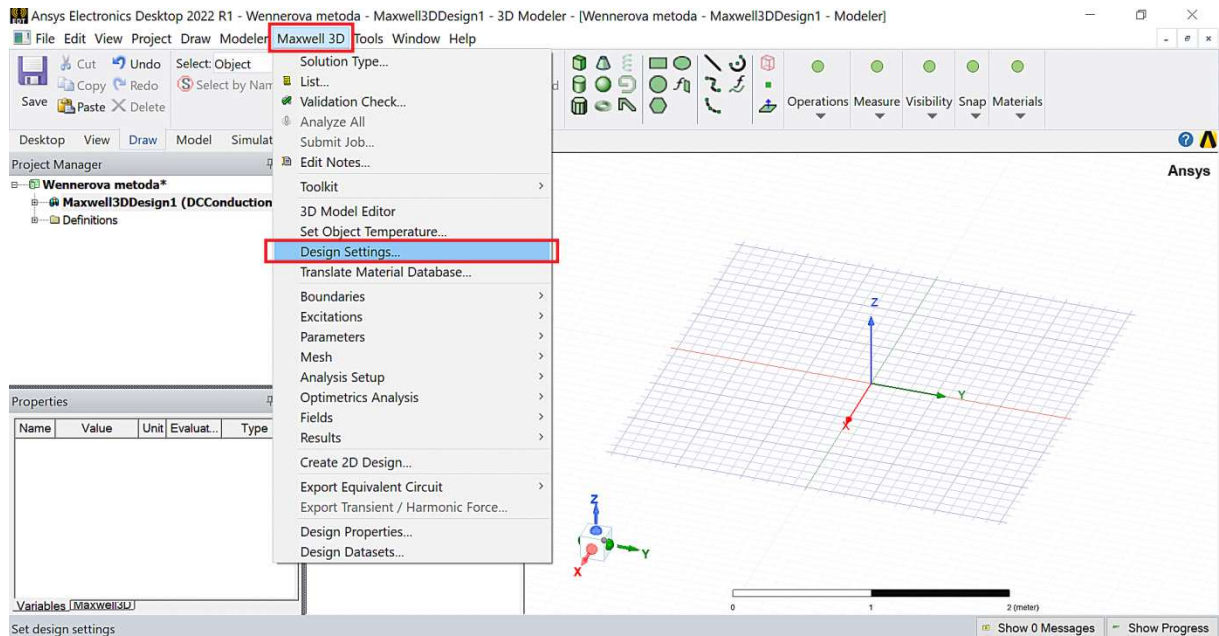


Slika 10.7 Pristupanje općim opcijama „General Options“.

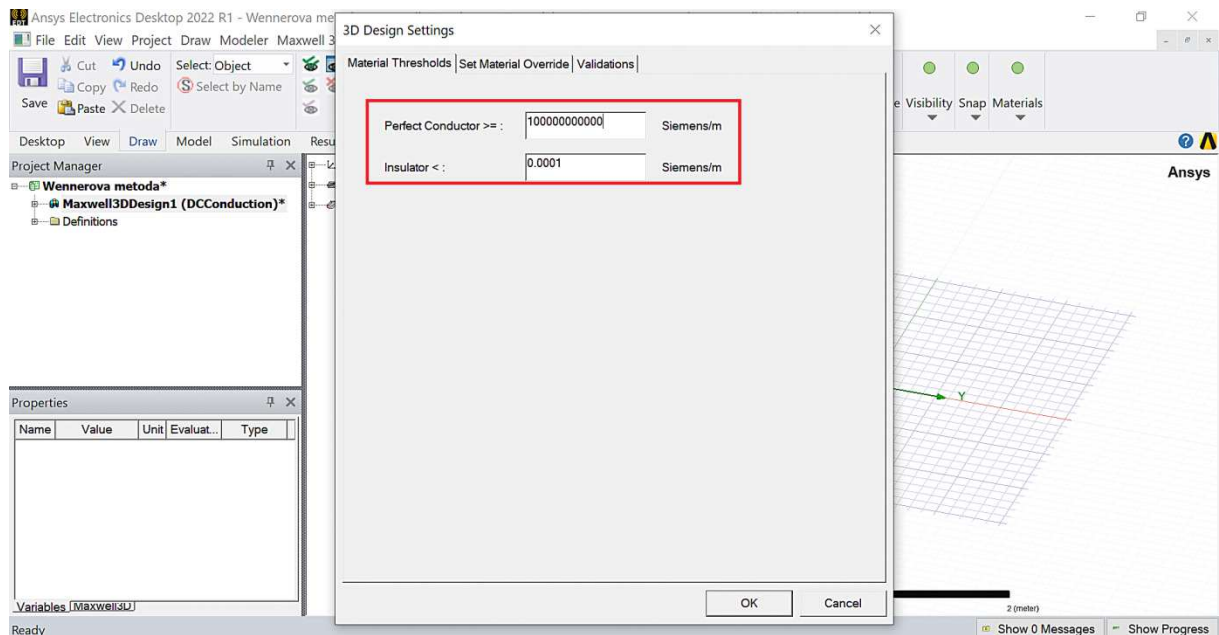


Slika 10.8 Pristupanje postavkama pragova materijala.

Sličnu je proceduru potrebno ponoviti u postavkama dizajna „*Design Settings*“ za „*Maxwell 3D*“, što je prikazano slikom 10.9. Nakon izbora „*Design Settings*“ otvara se prozor u kojemu se postavljaju željene bročane vrijednosti električne vodljivosti kojima su definirani pragovi za savršen vodič i izolator (slika 10.10).

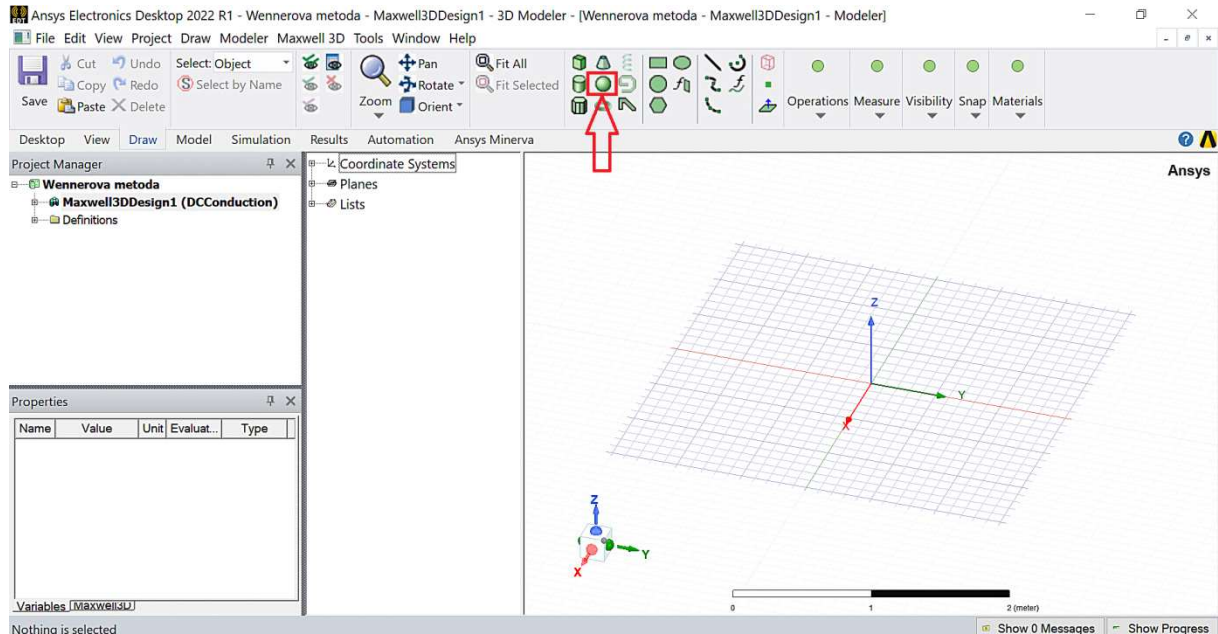


Slika 10.9 Pristupanje postavkama u „*Design Settings*“ za „*Maxwell 3D*“.

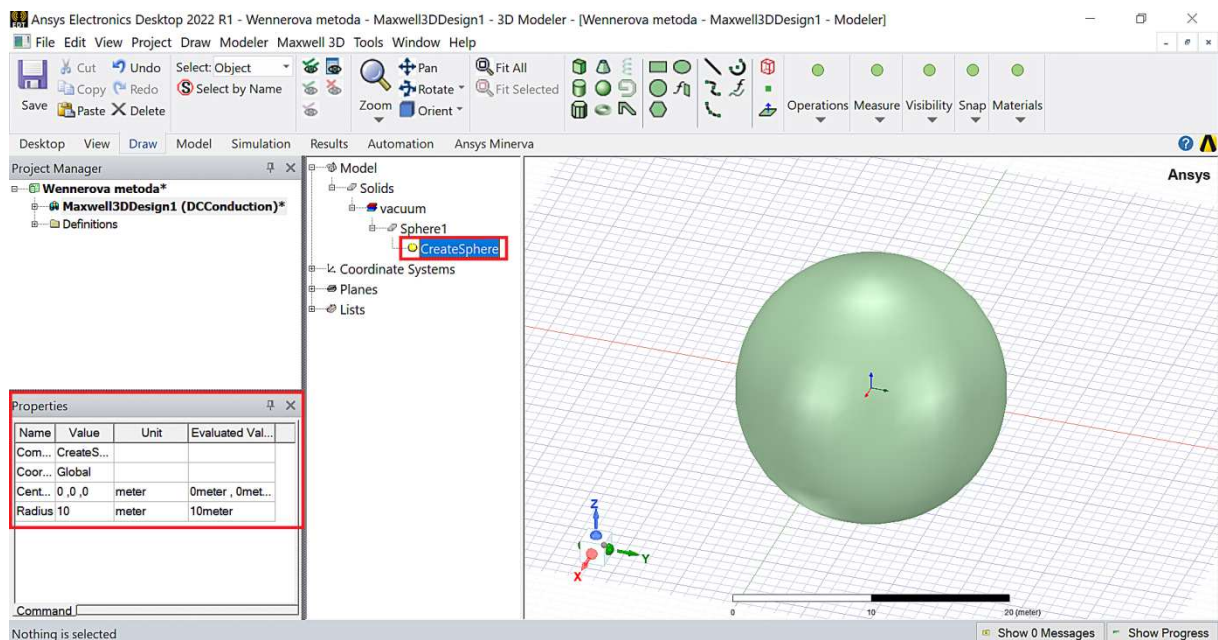


Slika 10.10 Pragovi materijala u „*3D Design Settings*“ za „*Maxwell 3D*“.

Crtaње geometrije obavlja se izborom odgovarajućih geometrijskih tijela u ponuđenoj paleti geometrijskih tijela. Za modeliranje tla koristit će se polukugla i cilindar. Crtaње geometrije pogodno je započeti crtanjem kugle koju je kasnije potrebno pretvoriti u polukuglu. Položaj ikone za crtaње kugle u paleti ponuđenih geometrijskih tijela nalazi se na položaju prikazanom slikom 10.11. Radi daljnjih pogodnosti, neka se središte nacrtane kugle podudara sa središtem koordinatnog sustava i neka je njezin radijus 10 m, koji će kasnije biti promijenjen na drugi iznos (slika 10.12.).

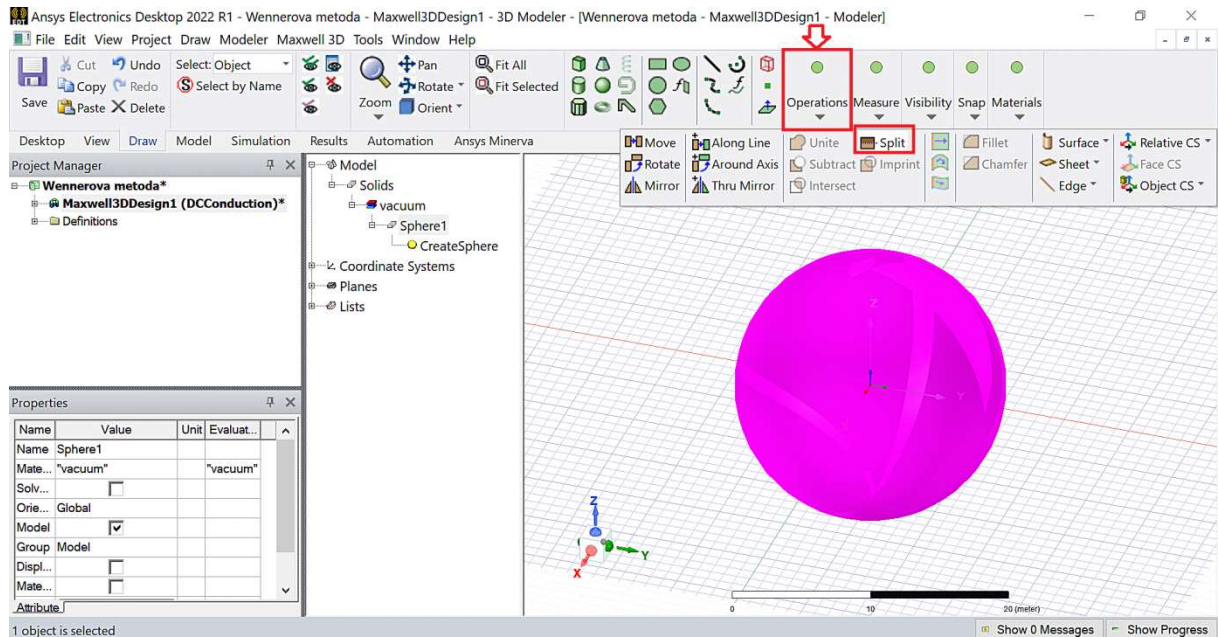


Slika 10.11 Položaj i izbor geometrijskog tijela kugle u paleti ponuđenih geometrija.

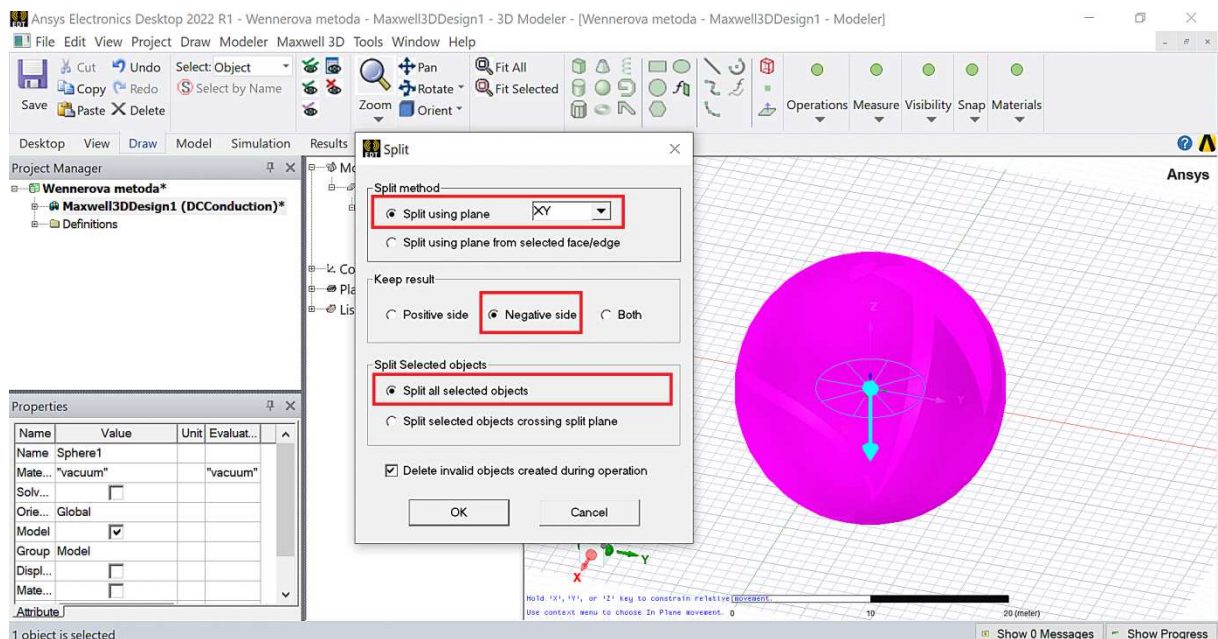


Slika 10.12 Izgled nacrtane kugle i njezini parametri (polje „Properties“).

S obzirom da će donji sloj tla biti modeliran kao polukugla, nacrtanu kuglu potrebno je prepoloviti duž xy ravnine na način da se zadrži dio koji je ispod xy ravnine ($z \leq 0$). Navedeno se obavlja izborom operacije „Split“ kako je to prikazano slikom 10.13. Nakon izbora operacije „Split“ otvara se prozor u kojemu je parametre operacije „Split“ potrebno postaviti na vrijednosti kako je prikazano slikom 10.14.

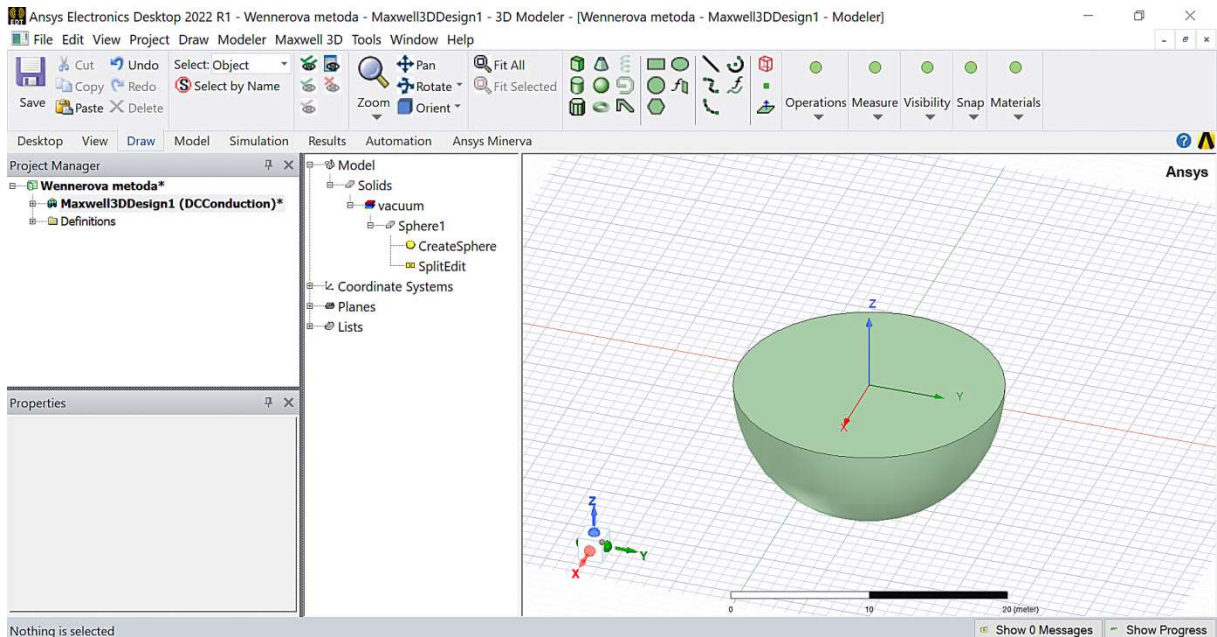


Slika 10.13 Izbor operacije „Split“.

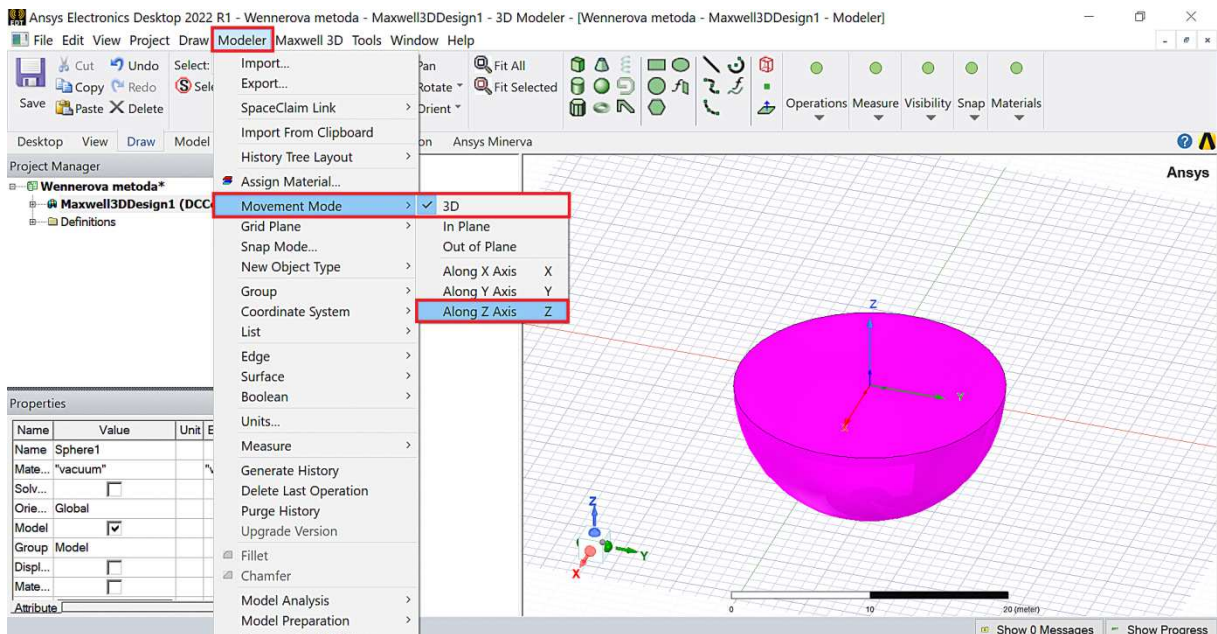


Slika 10.14 Postavljanje vrijednosti parametara operacije „Split“.

Nakon što se klikom na „OK“ potvrdi izbor parametara operacije „Split“ na radnoj površini modela pojavit će se polukugla kao što je to prikazano slikom 10.15. S obzirom da će dobivena polukugla biti donji sloj tla, iznad koje će biti postavljen cilindar kojim će se modelirati gornji sloj tla, dobivenu polukuglu potrebno je translirati duž z osi. Prije postupka translacije polukugle potrebno je zadati os translacije, što se obavlja izborom opcija prikazanih na slici 10.16.

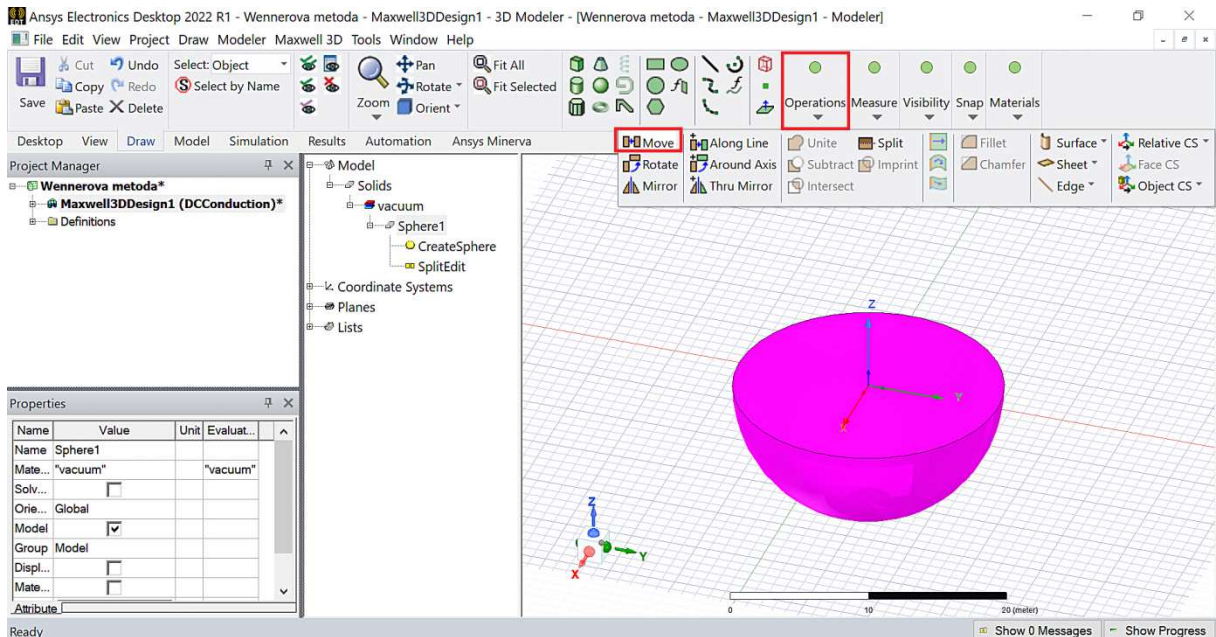


Slika 10.15 Izgled polukugle kojom je modeliran donji sloj tla.

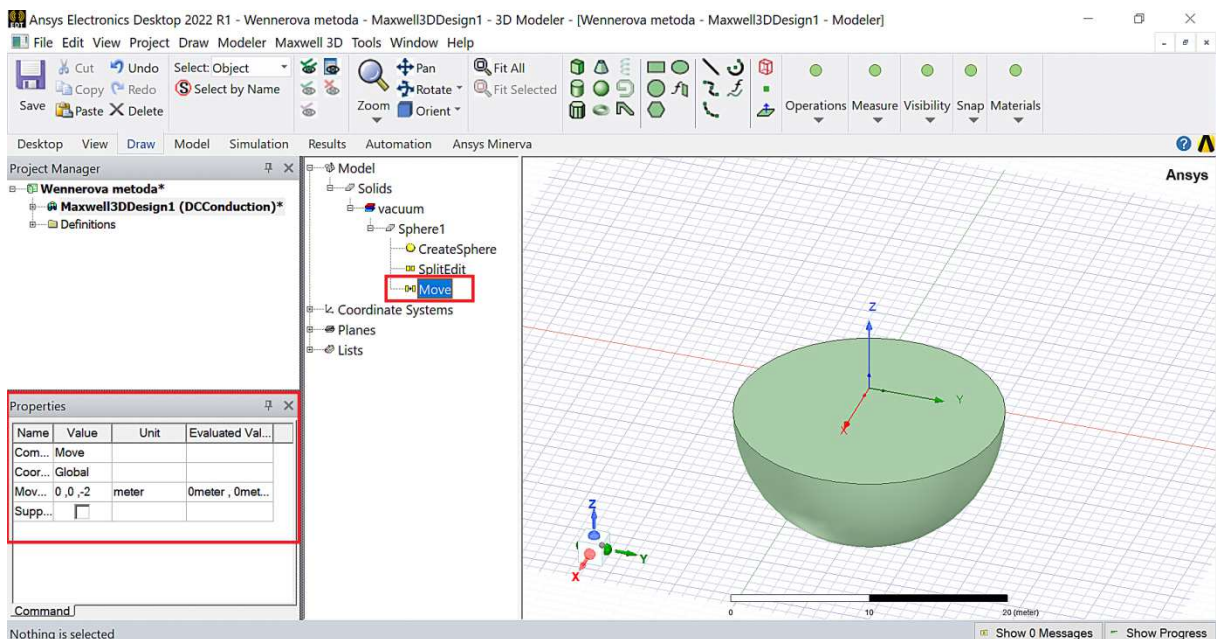


Slika 10.16 Izbor opcija za translaciju duž z osi.

Nakon što je zadana os translacije potrebno je izabrati operaciju translacije, što se obavlja izborom opcija kako je prikazano slikom 10.17. Do određene točnosti, translacija se može obaviti pokazivačem. Točnije postavljanje vrijednosti translacije obavlja se klikom na opciju „Move“ koja se nalazi u polju modela. Nakon toga pojavljuje se polje „Properties“ u kojemu su prikazani parametri translacije koji se mogu mijenjati (slika 10.18). U ovom primjeru polukugla je pomaknuta 2 metra duž negativne z osi (slika 10.18).

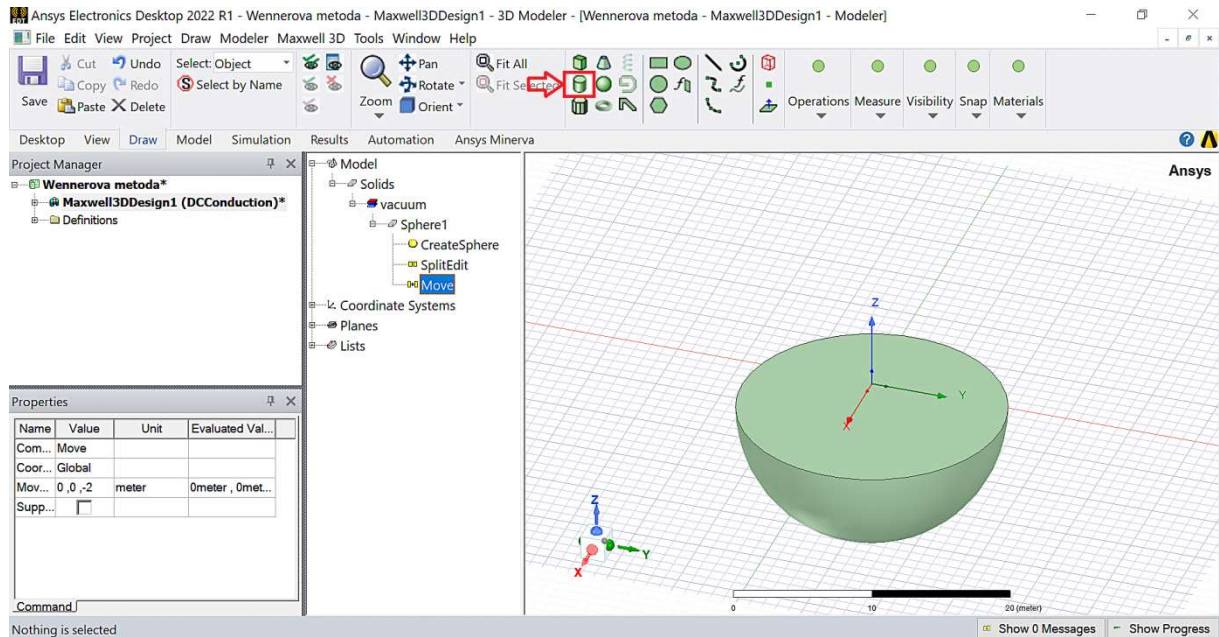


Slika 10.17 Izbor opcija za translaciju polukugle.

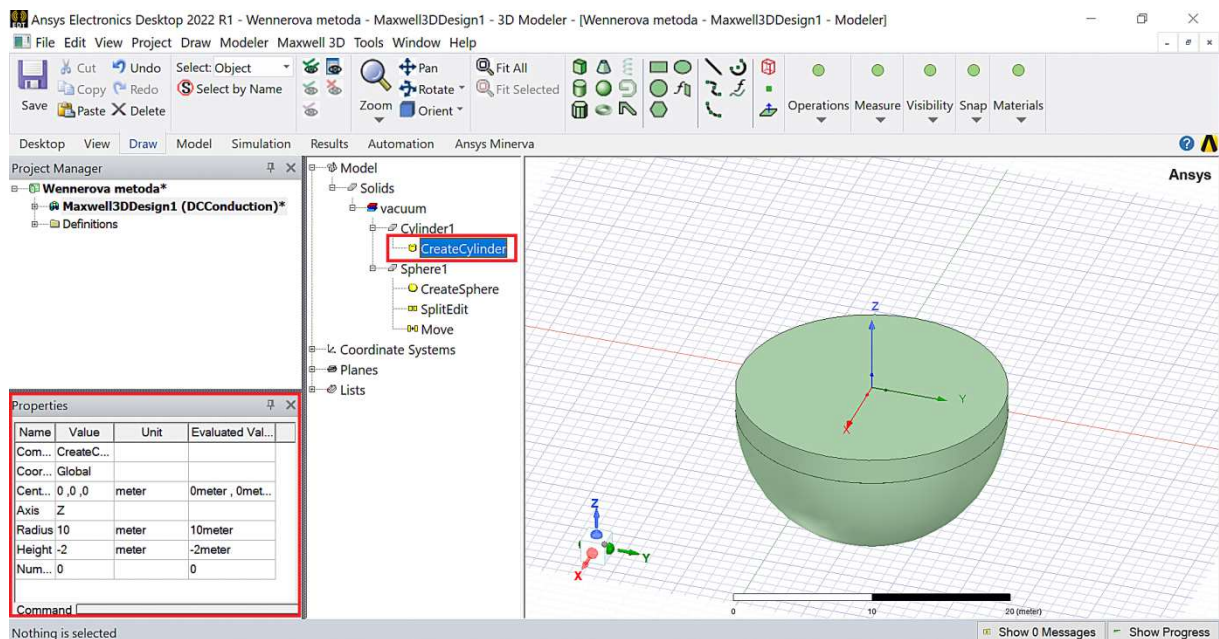


Slika 10.18 Prikaz polja „Properties“ s parametrima translacije.

Gornji sloj tla bit će predstavljen cilindrom kojemu je donja baza u kontaktu s gornjom plohom nacrtane polukugle. Položaj ikone za crtanje cilindra prikazan je slikom 10.19. Nakon crtanja cilindra kojim je modeliran gornji sloj tla njegovi geometrijski podaci mogu se vidjeti u polju „*Properties*“ nakon što se u polju modela mišem klikne na „*Create Cylinder*“, što je prikazano slikom 10.20.

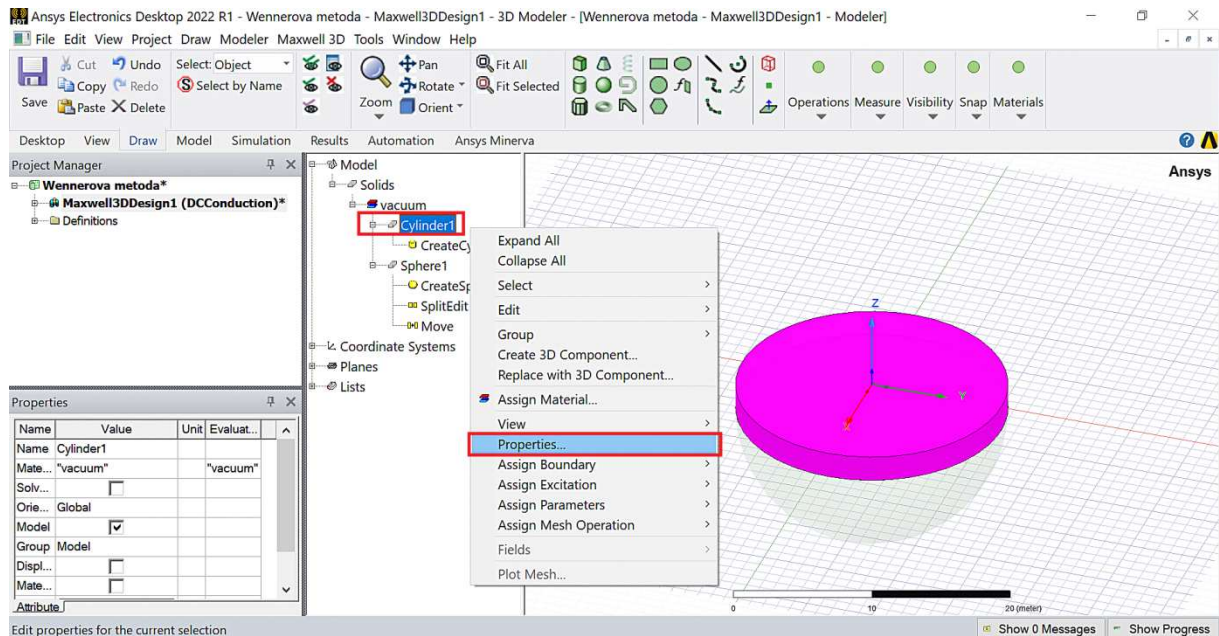


Slika 10.19 Položaj ikone za crtanje cilindra.

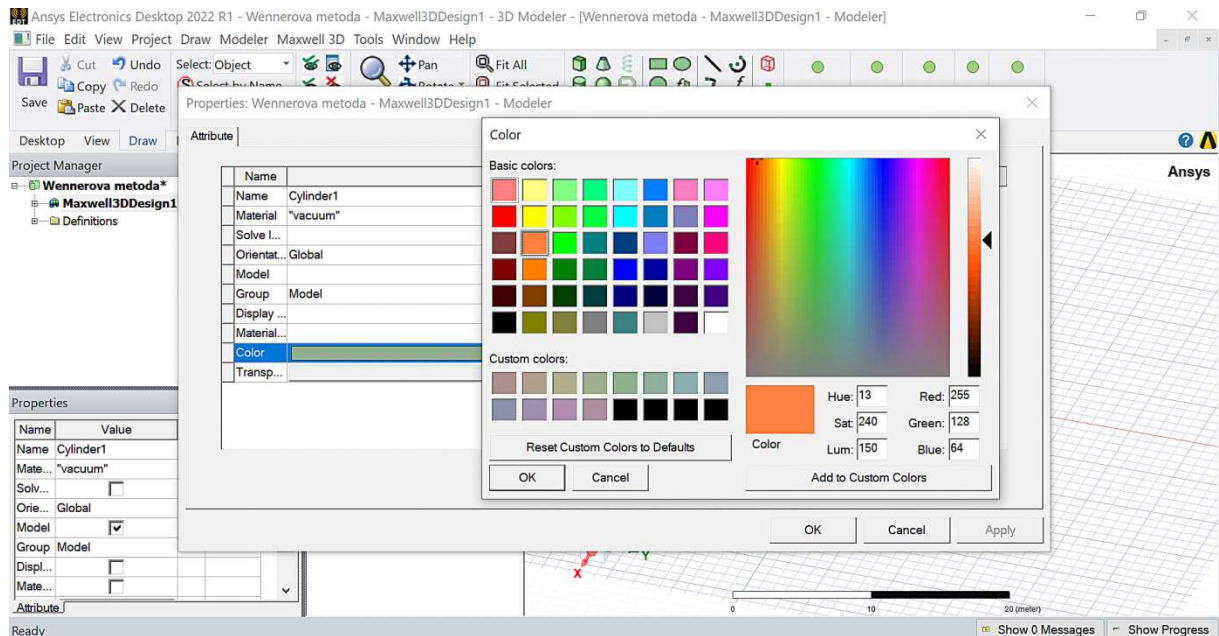


Slika 10.20 Prikaz polja „*Properties*“ s geometrijskim podacima nacrtanog cilindra.

Radi zornijeg prikaza modela tla, gornjem i donjem sloju tla mogu se pridružiti različite boje. Postupak zadavanja boje gornjem sloju tla započinje se klikom na „Cylinder1“, a zatim nakon desnog klika miša otvara se izbornik u kojemu je potrebno odabrati opciju „Properties“ (slika 10.21). Nakon provedbe navedenih radnji pojavljuje se prozor s paletom boja (slika 10.22) iz koje se može izabrati boja koja se želi pridružiti gornjem sloju tla.

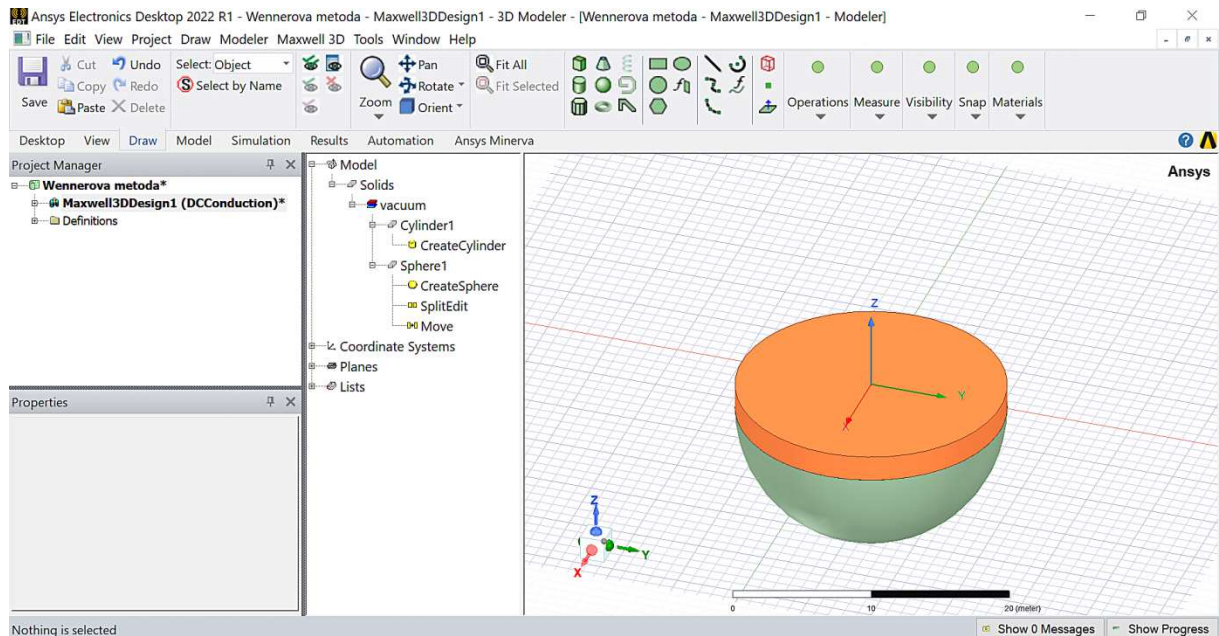


Slika 10.21 Prikaz polja „Properties“ s parametrima translacije.

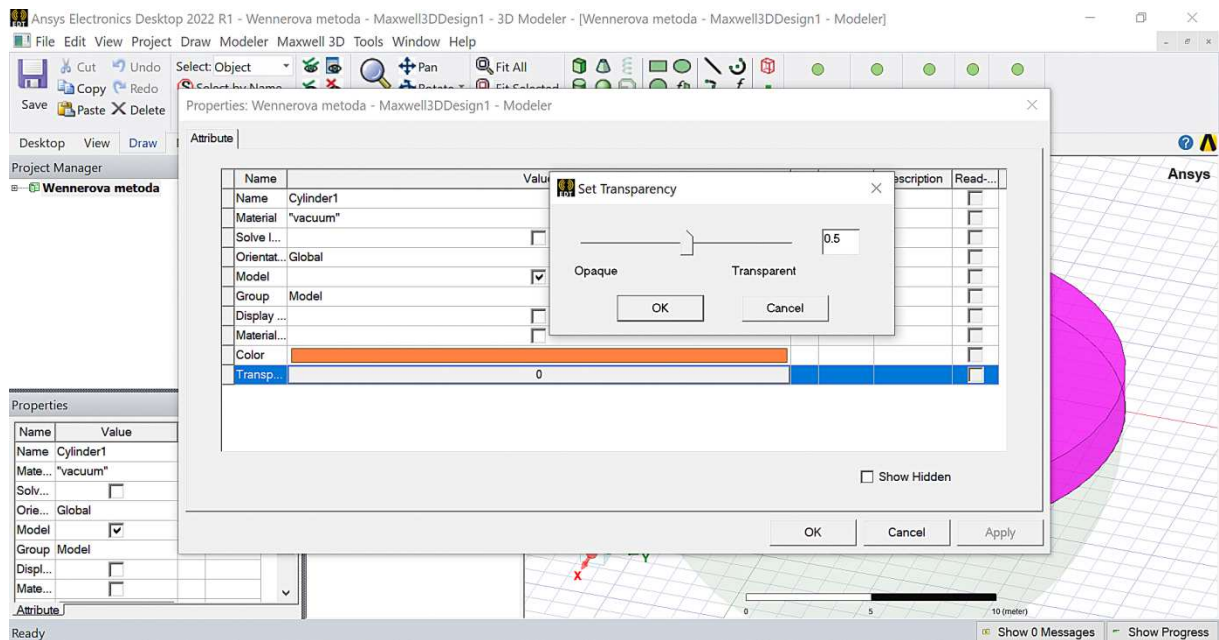


Slika 10.22 Paleta boja i osnovni atributi vezani uz geometriju pod nazivom „Cylinder1“.

Nakon potvrde izbora nove boje (narančasta boja) gornjeg sloja tla, tlo ima izgled i boje prikazane slikom 10.23. Uz promjenu boje određenog dijela geometrije, često je pogodno određenu geometriju u modelu načiniti djelomično prozirnou. Navedeno se može učiniti podešavanjem izborom opcije „Set Transparency“ kako je to prikazano slikom 10.24.

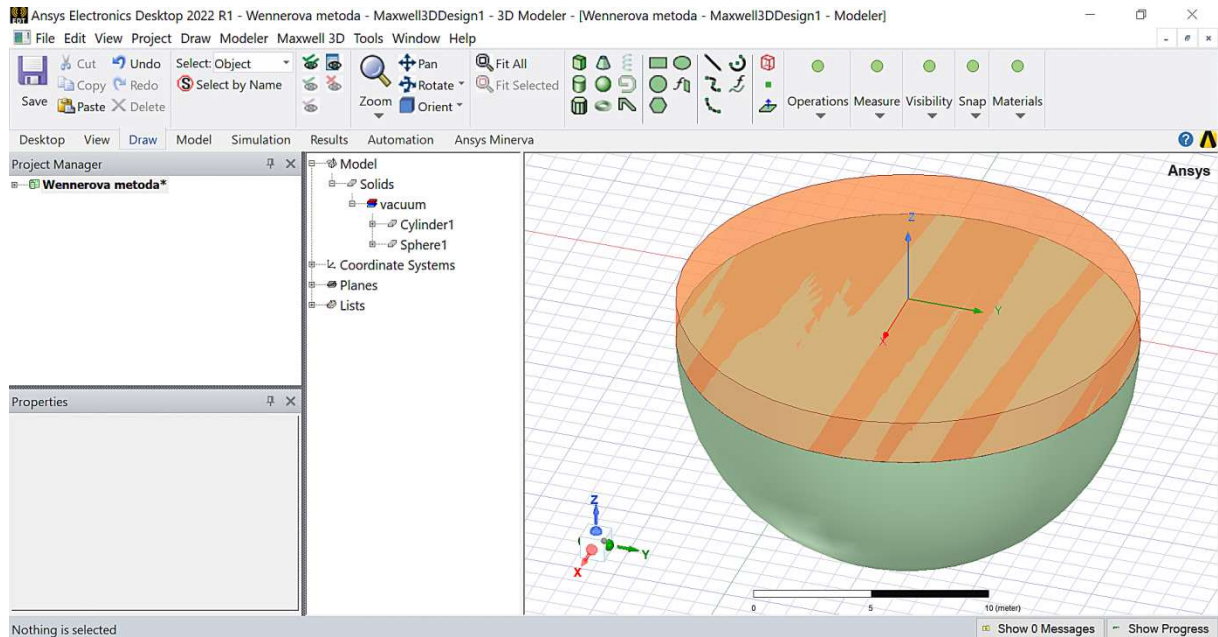


Slika 10.23 Izgled gornjeg sloja tla nakon pridruživanja narančaste boje.

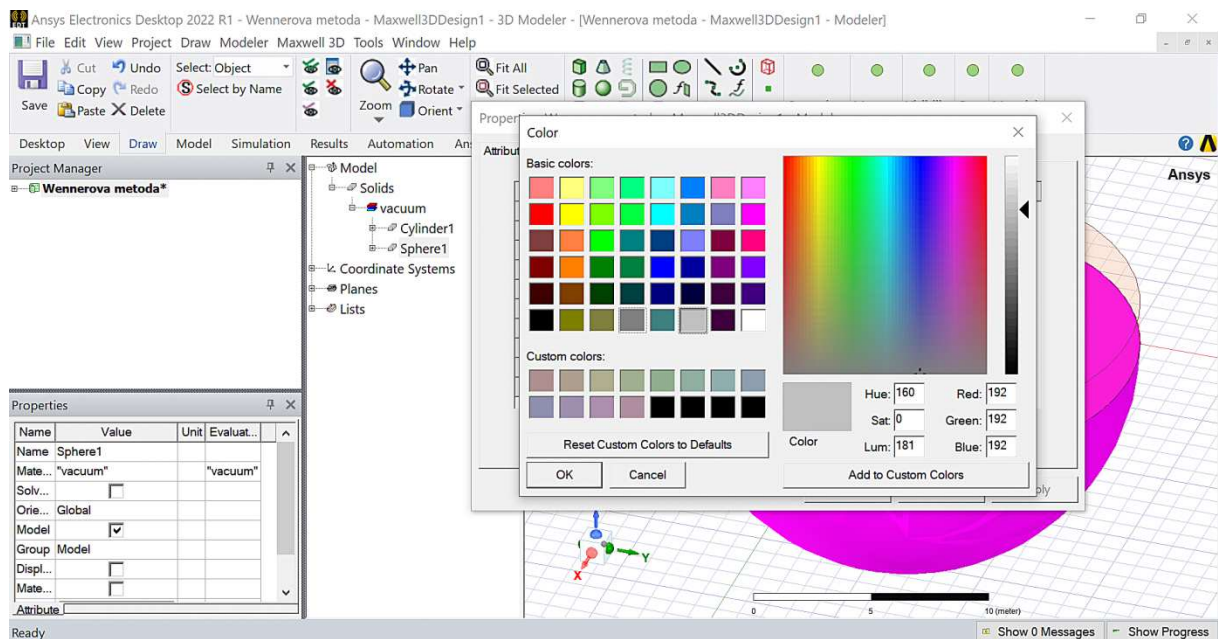


Slika 10.24 Zadavanje prozirnosti geometrije gornjeg sloja tla.

Izgled gornjeg sloja tla nakon zadanog iznosa prozirnosti od 50 % prikazan je slikom 10.25. Na prethodno opisan način može se promijeniti boja u donjem sloju tla (slika 10.26).



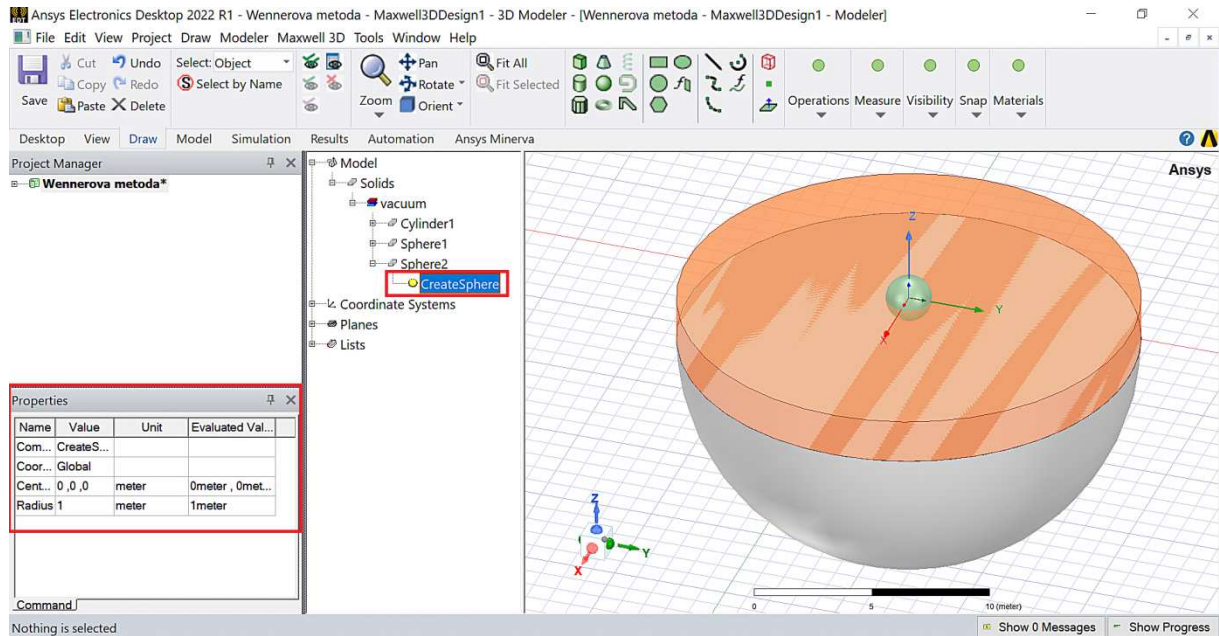
Slika 10.25 Izgled gornjeg sloja tla nakon zadanog iznosa prozirnosti.



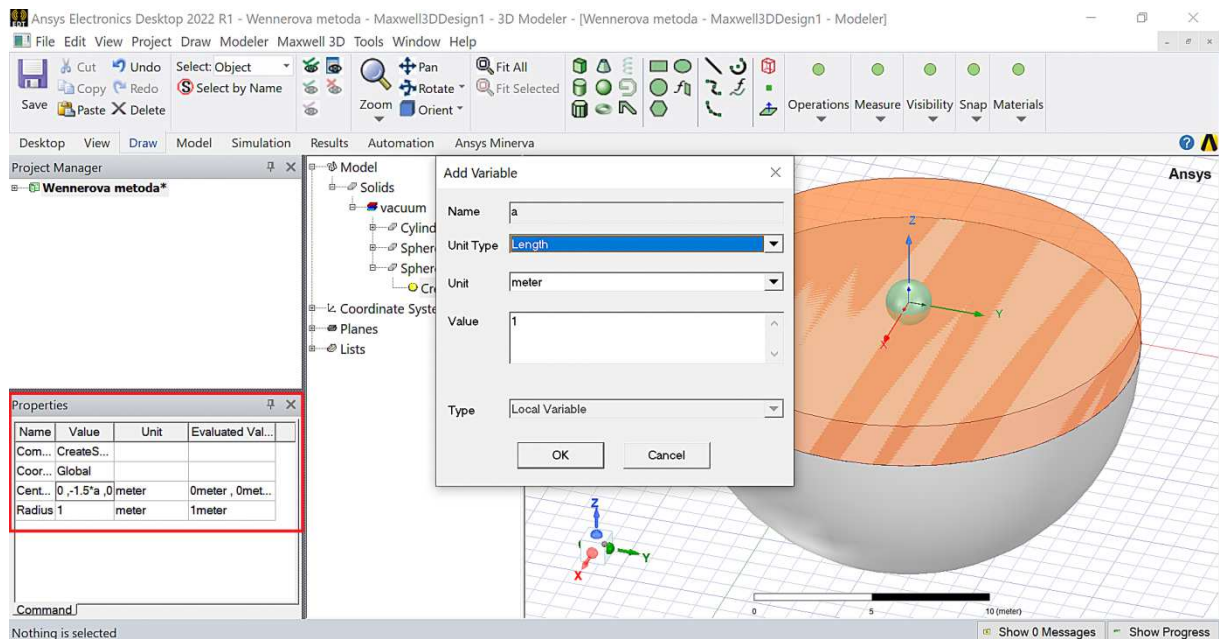
Slika 10.26 Promjena boje donjeg sloja tla oblika polukugle.

Sljedeći je korak u crtanju geometrijskog dijela modela crtanje strujnih elektroda koje će biti predstavljene polukuglama s bazom okrenutom prema gore. Prije crtanja strujnih elektroda potrebno je iz gornjeg sloja tla izuzeti polukugle u koje će biti postavljene strujne elektrode.

Radi kasnijih pogodnosti nova je kugla nacrtana sa središtem u središtu koordinatnog sustava s radijusom od 1 m kako je prikazano slikom 10.27. U polju modela klikom na opciju „Sphere2/CreateSphere“ postaje vidljivo polje „Properties“ (slika 10.27). Promjena položaja odvija se u polju „Properties“ postavljanjem y koordinate na vrijednost $y = -1.5 \cdot a$ (slika 10.28). Kako je uvedena nova varijabla „ a “, otvorit će se prozor u kojemu će program tražiti od korisnika da ju pobliže definira. Postavite vrijednosti kako je prikazano slikom 10.28.

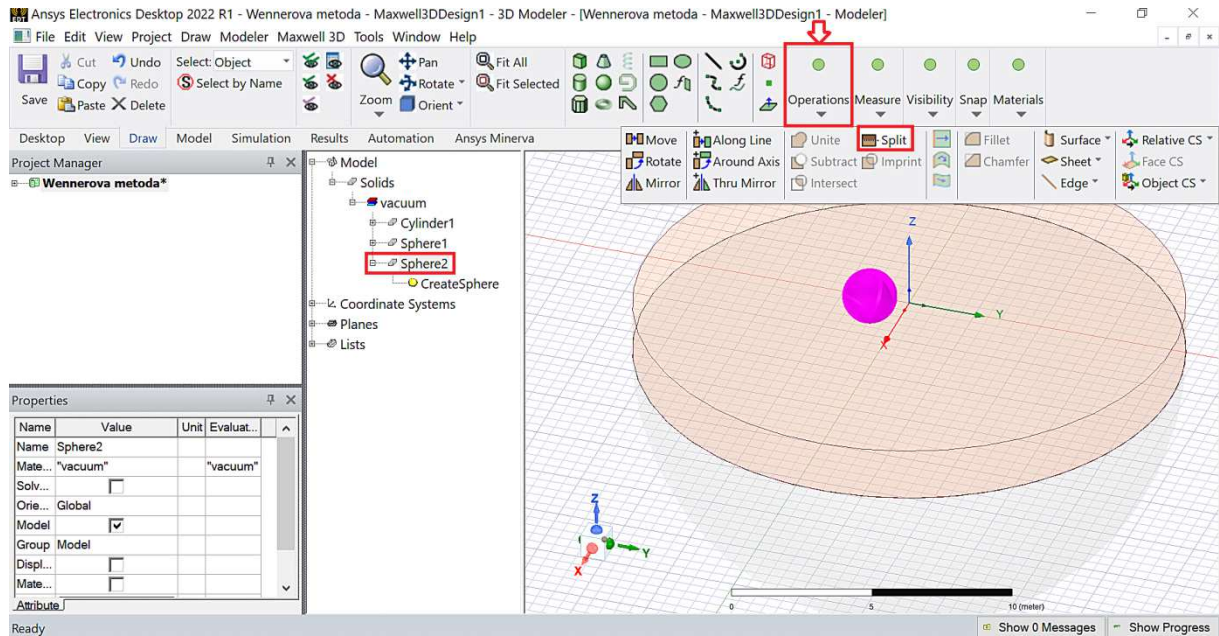


Slika 10.27 Izgled nacrtane manje kugle sa središtem u središtu koordinatnog sustava.

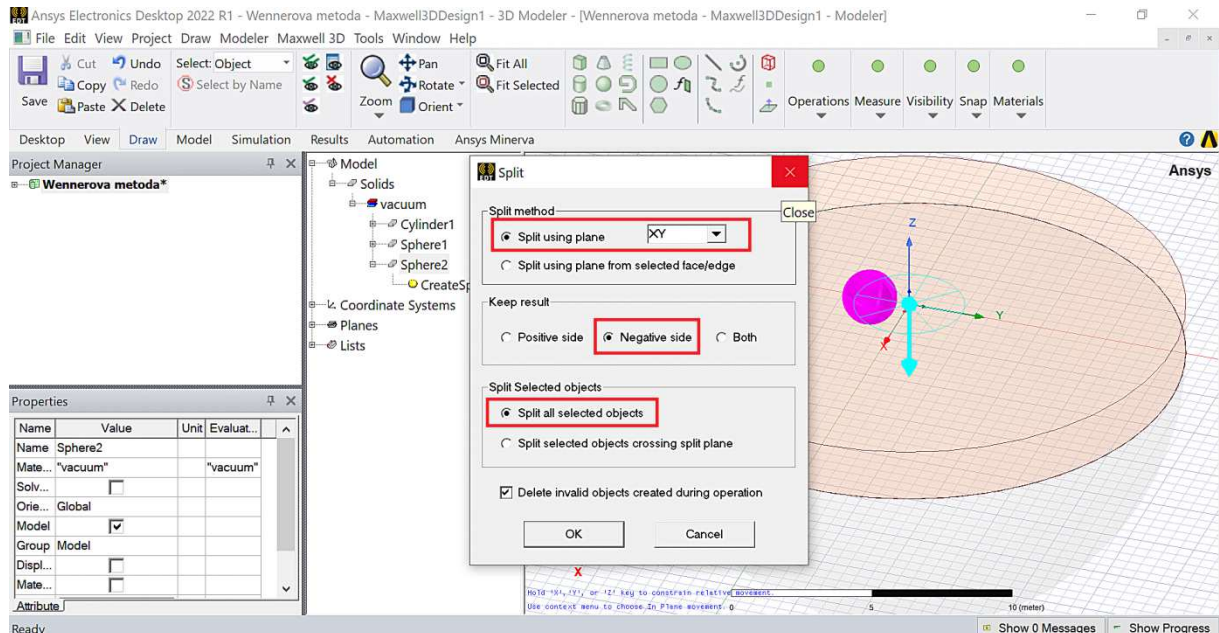


Slika 10.28 Definiranje položaja kugle u polju „Properties“ i definiranje varijable „ a “.

Slijedi primjena operacije „Split“ kako bi se od nacrtane kugle načinila polukugla. Prvo je potrebno odabrati tijelo („Sphere2“) na koju će se primijeniti operacija „Split“ te zatim kliknuti na operaciju „Split“ (slika 10.29). Položaj ikone za operaciju „Split“ prikazan je slikom 10.29. Nakon klika na ikonu „Split“ potrebno je zadati parametre operacije „Split“ kako je prikazano slikom 10.30.

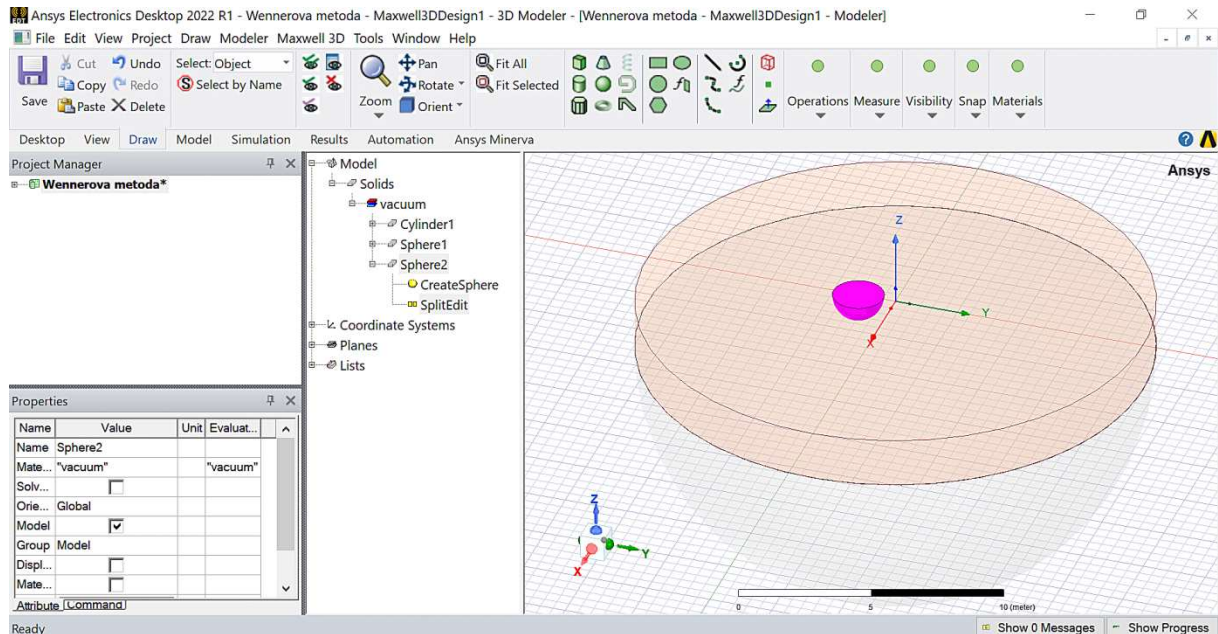


Slika 10.29 Položaj ikone za operaciju „Split“.

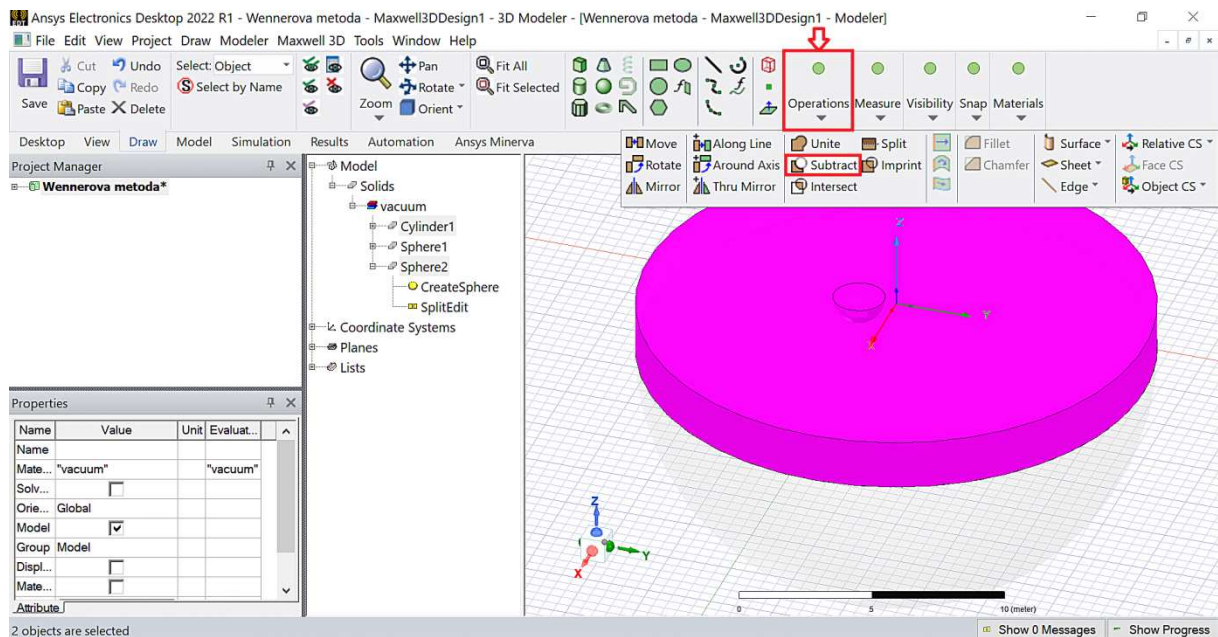


Slika 10.30 Parametri operacije „Split“.

Izgled i položaj geometrijskog tijela oblika polukugle nastalog nakon provedbe operacije „Split“ prikazan je na slici 10.31. Dobivena geometrija treba biti izuzeta iz gornjeg sloja tla, što se postiže primjenom operacije „Subtract“. Prije primjene operacije „Subtract“ potrebno je označiti geometriju gornjeg sloja tla i novonastalu geometriju oblika polukugle kako je to prikazano slikom 10.32.

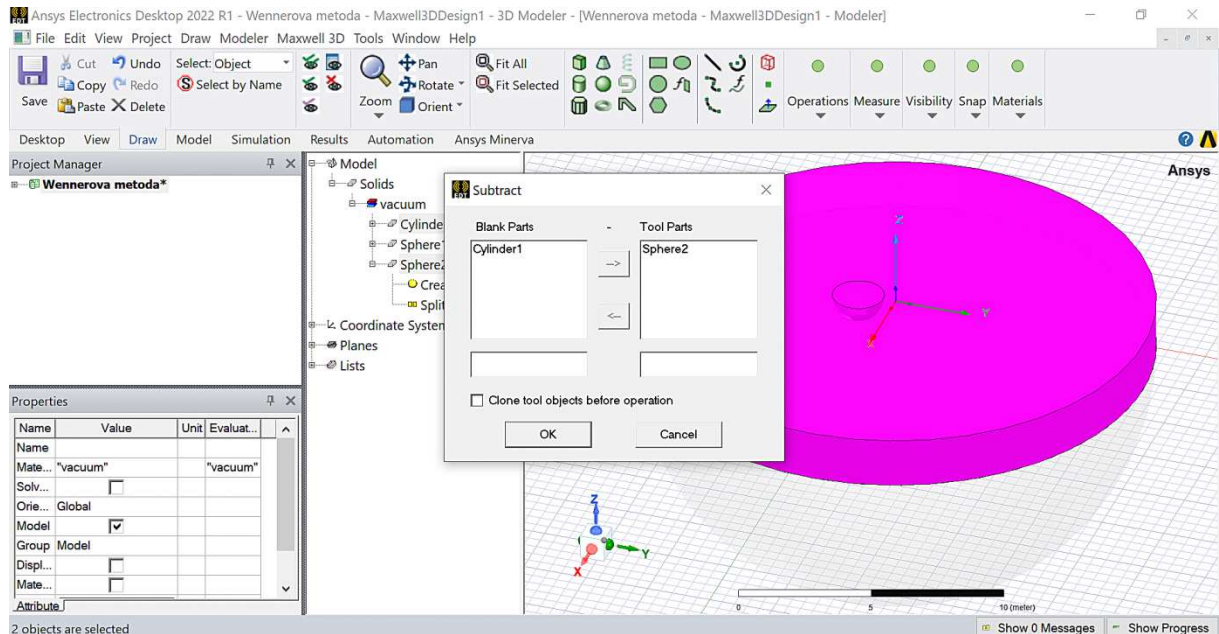


Slika 10.31 Izgled i položaj novonastalog geometrijskog tijela oblika polukugle.

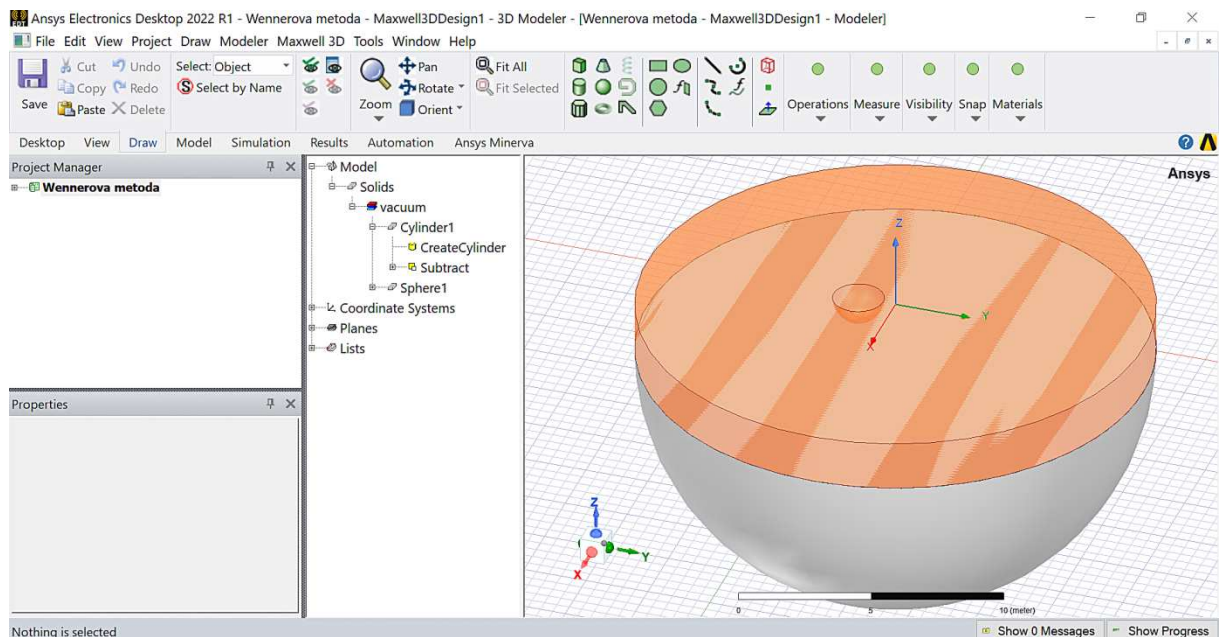


Slika 10.32 Označene geometrije i položaj ikone za operaciju „Subtract“.

Nakon klika na ikonu „*Subtract*“ otvara se prozor u kojemu je potrebno zadati parametre operacije „*Subtract*“ kako je to prikazano slikom 10.33. Nakon potvrde operacije „*Subtract*“ klikom miša na „*OK*“ dobiva se izgled modela kako je prikazano slikom 10.34. Polukugla koja se vidi u gornjem sloju tla na slici 10.34 prazan je prostor oblika polukugle u gornjem sloju tla gdje će kasnije biti postavljena vodljiva strujna elektroda istog oblika.

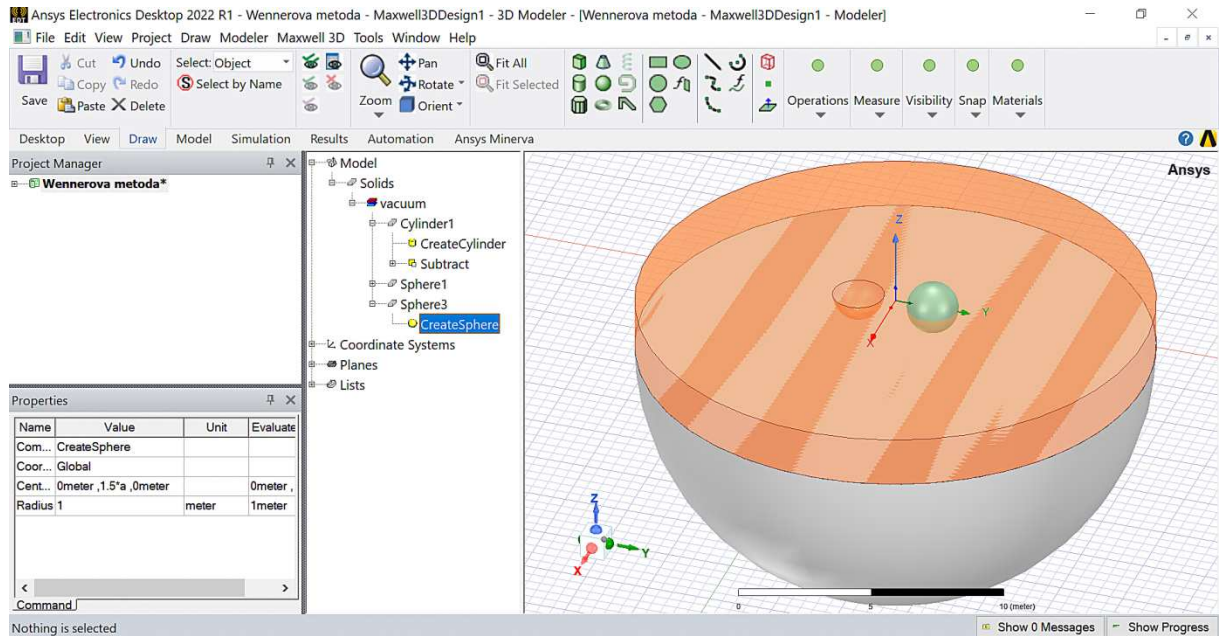


Slika 10.33 Parametri operacije „*Subtract*“.

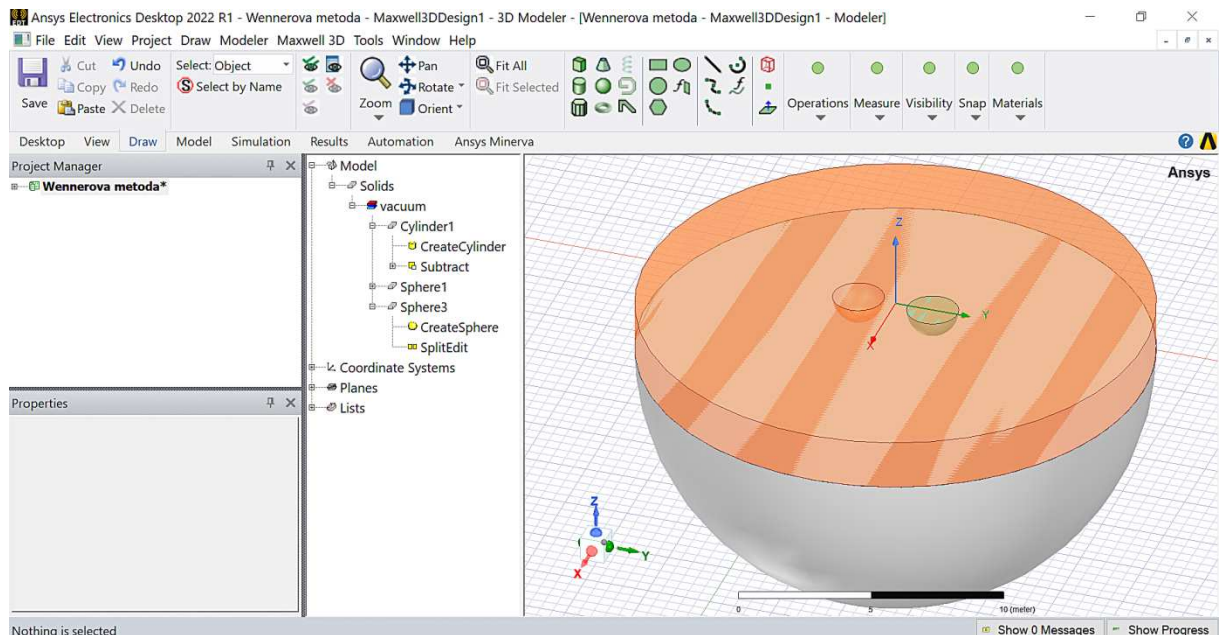


Slika 10.34 Izgled modela nakon primjene operacije „*Subtract*“.

Prethodno opisani postupak kreiranja polukugle na poziciji gdje će biti postavljena druga strujna elektroda prikazan je na slici 10.35 i slici 10.36. Postupak započinje crtanjem nove male kugle „Sphere3“ na koju je potrebno primijeniti operaciju „Split“. Koordinate središta ove nove polukugle su $(x, y, z) = (0, 1.5 \cdot a, 0)$ što se može vidjeti u polju „Properties“ (slika 10.35).

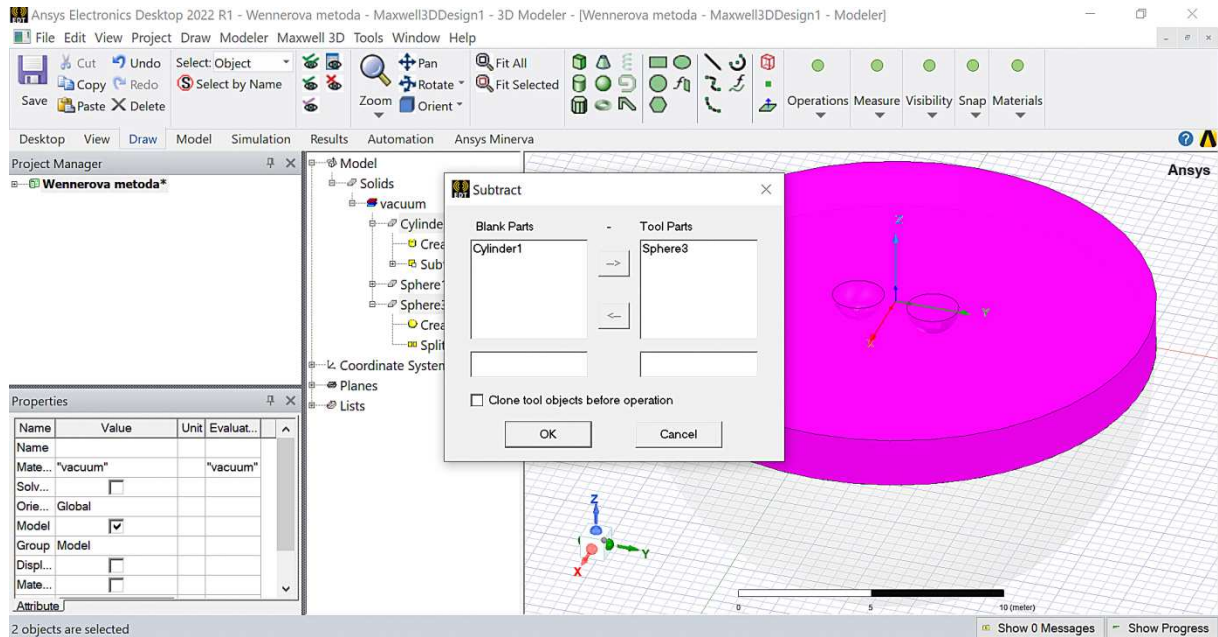


Slika 10.35 Izgled modela nakon nacrtane nove kugle „Sphere3“.

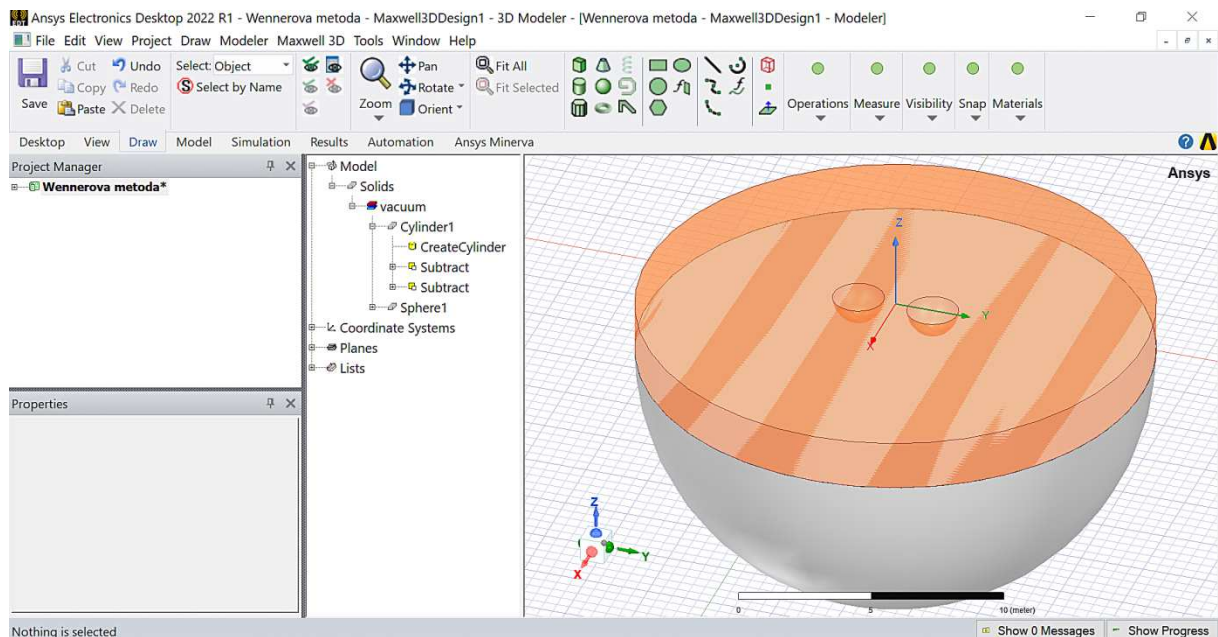


Slika 10.36 Izgled modela nakon primjene operacije „Split“ na kugli pod nazivom „Sphere3“.

Dobivena geometrija treba biti izuzeta iz gornjeg sloja tla, što se postiže primjenom operacije „*Subtract*“. Prije primjene operacije „*Subtract*“ potrebno je označiti geometriju gornjeg sloja tla i novonastalu geometriju oblika polukugle. Parametri operacije „*Subtract*“ prikazani su na slici 10.37. Nakon primjene operacije „*Subtract*“, novi izgled modela tla s rupama predviđenim za strujne elektrode prikazan je slici 10.38.

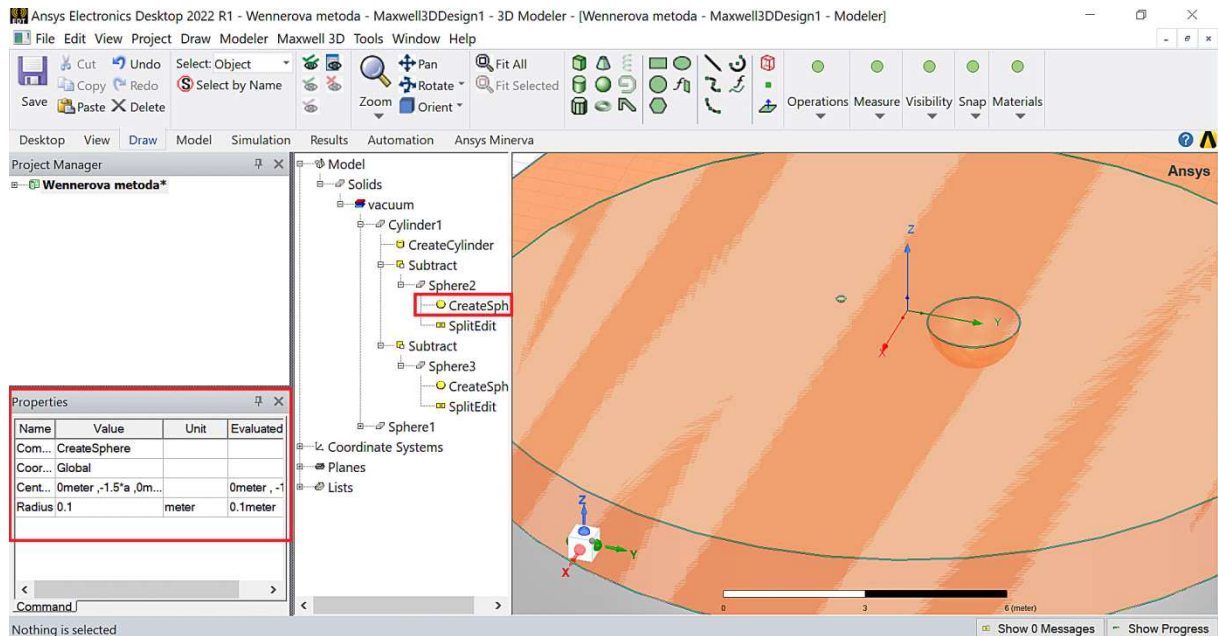


Slika 10.37 Parametri operacije „*Subtract*“.

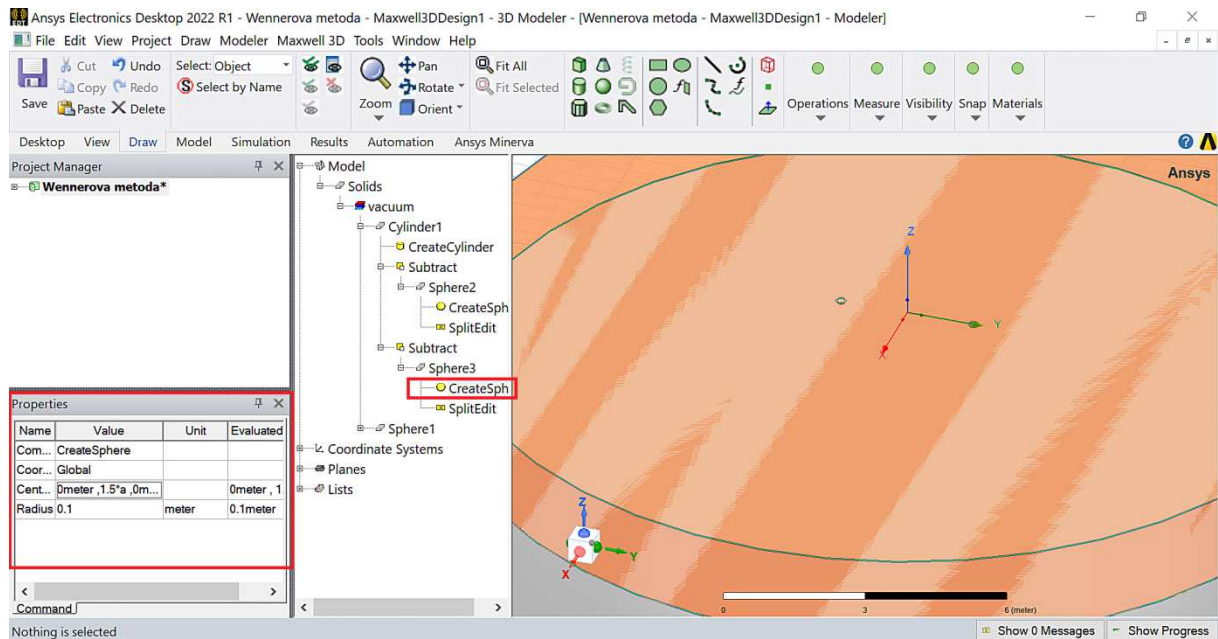


Slika 10.38 Izgled modela nakon primjene operacije „*Subtract*“.

Radi zornosti prikaza i lakšeg označavanja geometrije, prethodno su male polukugle nacrtane s znatno većim radijusom, negoli što trebaju biti. Promjena radijusa nacrtanih malih polukugli obavlja se u polju „*Properties*“ kao što je prikazano na slici 10.39 i slici 10.40. Polumjeri obiju polukugli trebaju biti 0,1 m.

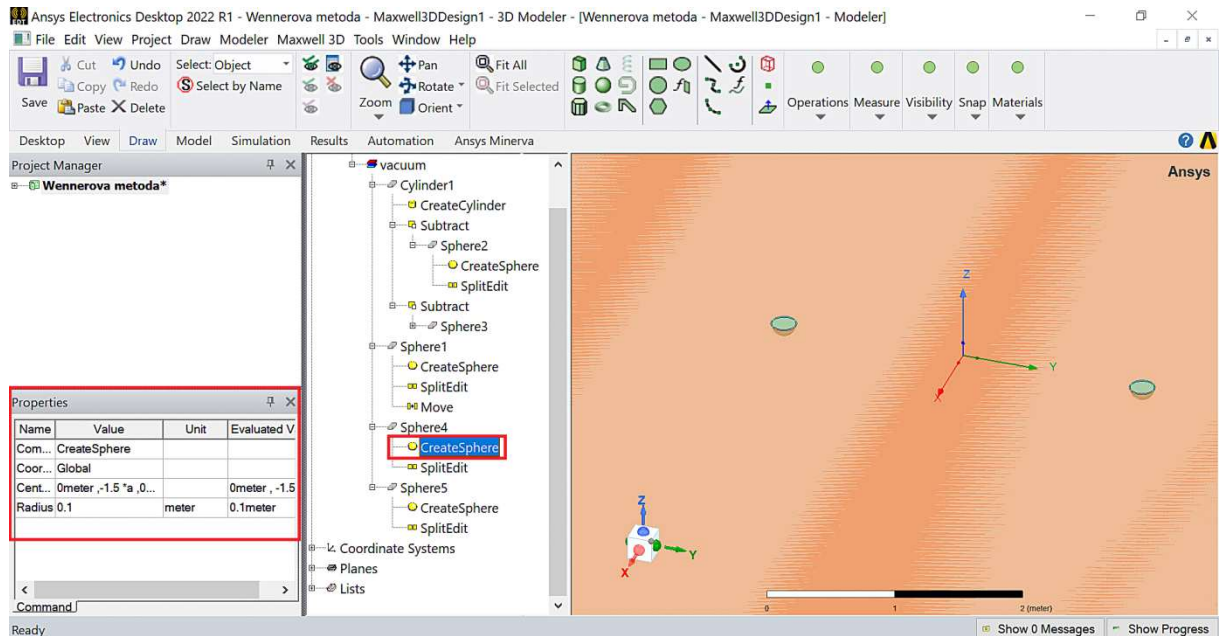


Slika 10.39 Zadavanje novih dimenzija geometrijskom tijelu „*Sphere2*“.

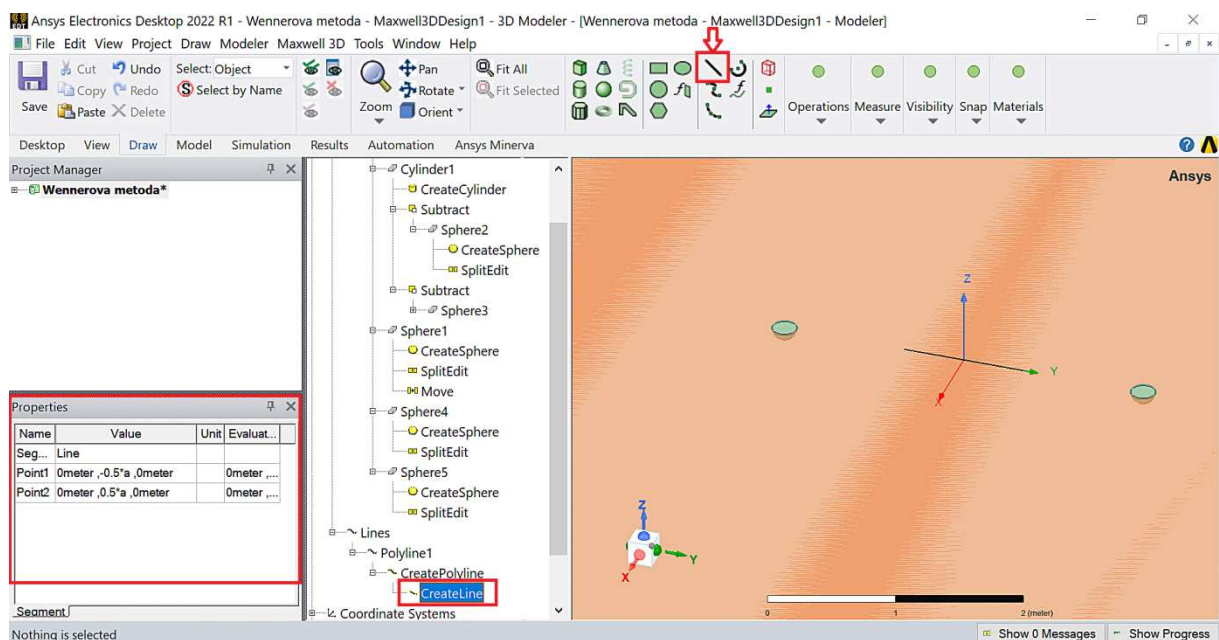


Slika 10.40 Zadavanje novih dimenzija geometrijskom tijelu „*Sphere3*“.

Ispunjavanje izdubljenog prostora oblika malih polukugli u gornjem sloju tla potrebno je ispuniti novim polukuglama istih dimenzija. Navedeno započinje crtanjem novih malih kugli („Sphere4“ i „Sphere5“) koje je potrebno prepoloviti. Za primjer, dimenzije i položaj jedne od novonacranih polukugli dani su u polju „Properties“ na slici 10.41. Udubljenja u tlu nije potrebno crtati za naponske elektrode. Napon između naponskih elektroda može se odrediti integriranjem električnog polja duž segmenta pravca „Polyline“ na površini tla s početkom i završetkom koji odgovaraju položaju središta naponskih elektroda (slika 10.42).

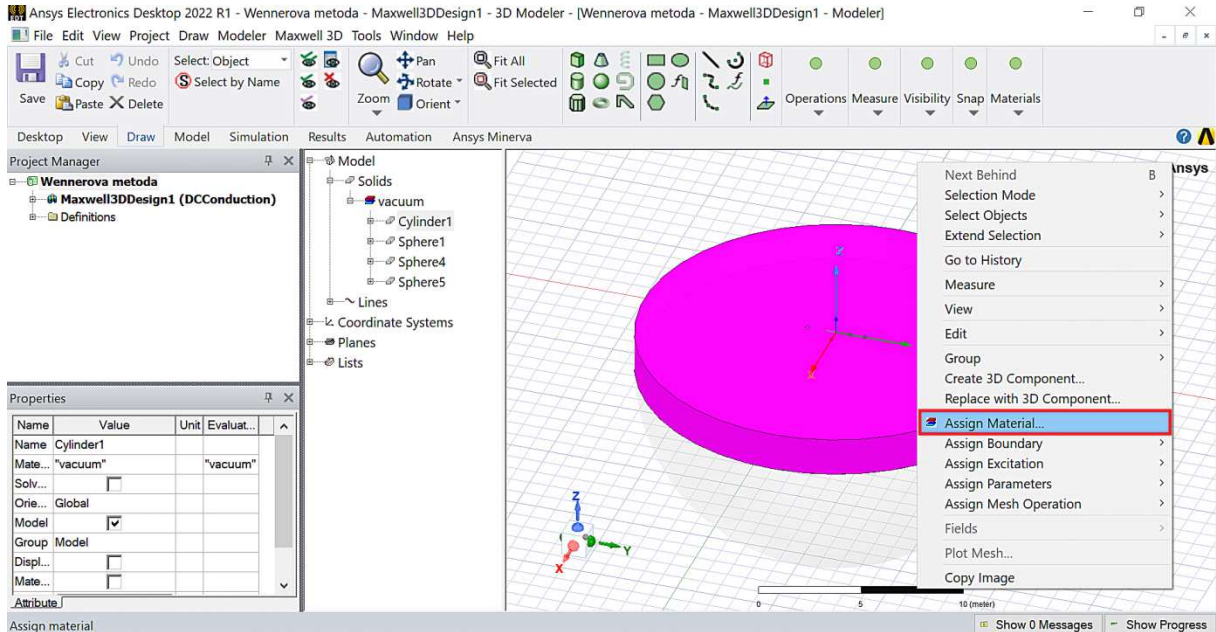


Slika 10.41 Položaj i dimenzije jedne od malih polukugli koja će biti strujna elektroda.

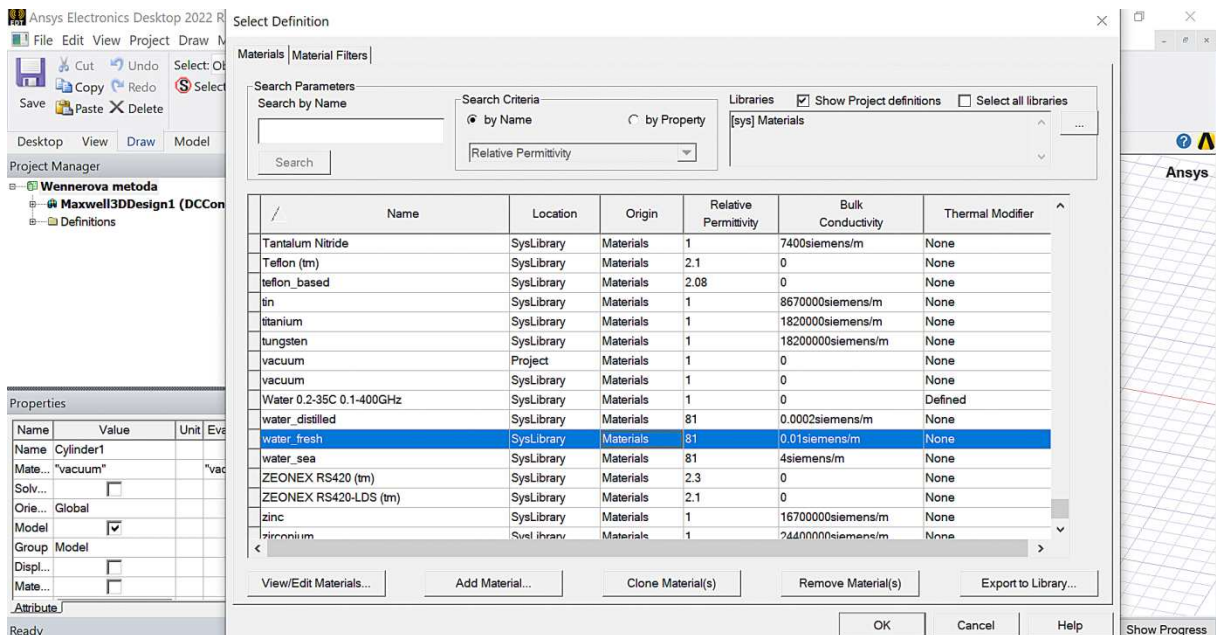


Slika 10.42 Položaj ikone za crtanje segmenta pravca i nacrtan segment pravca.

Nakon što je geometrija modela nacrtana može se pristupiti pridruživanju materijala geometrijskim tijelima modela. Nakon što se mišem označi cilindar kojim je predstavljen gornji sloj tla, nakon desnog klika miša, otvara se izbornik u kojemu je potrebno odabrati opciju „Assign Material“ (slika 10.43). Klikom na „Assign Material“ otvara se prozor prikazan na slici 10.44 u kojemu se bira materijal s najbližim električnim svojstvima (engl. *Water_fresh*) koja će biti izmijenjena, što se obavlja klikom na opciju „Clone Material(s)“.

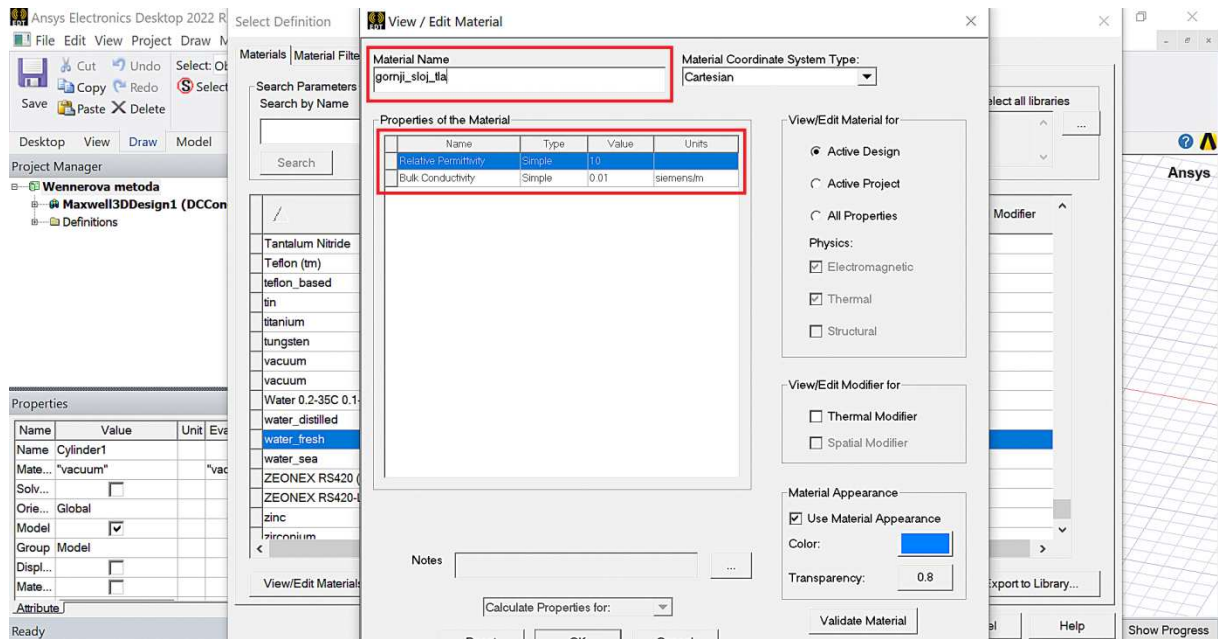


Slika 10.43 Izbor opcije „Assign Material“ cilindru kojime je modeliran gornji sloj tla.

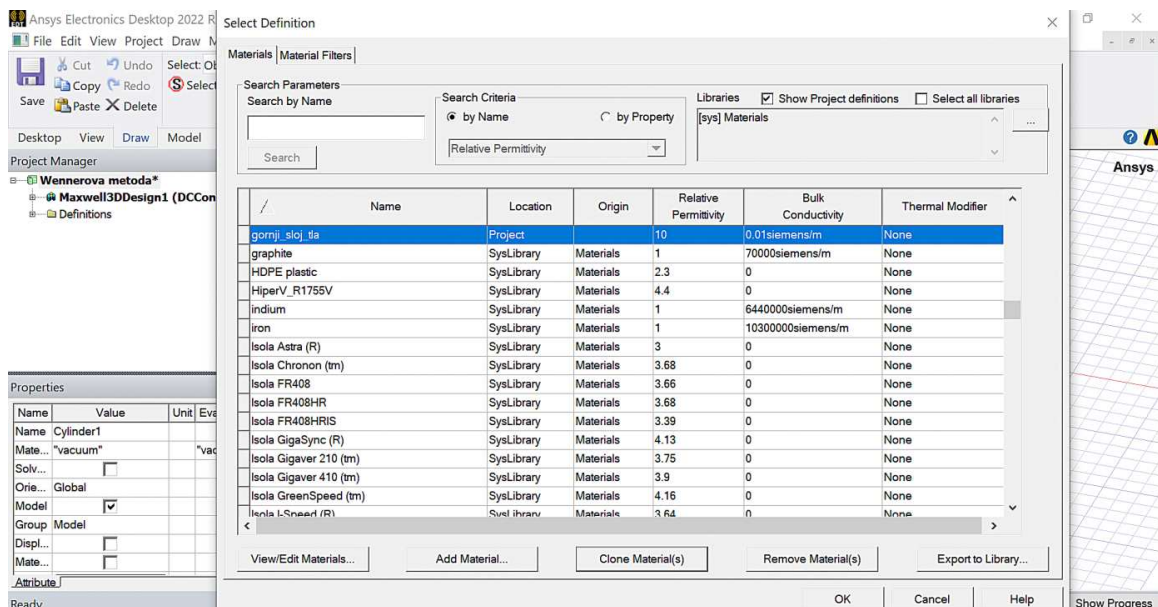


Slika 10.44 Izbor materijala sa sličnim električnim svojstvima i izbor opcije „Clone Material(s)“.

Klikom na „Clone Material(s)“ otvara se prozor prikazan slikom 10.45 u kojemu korisnik može promijeniti naziv materijala i njegova električna svojstva. U ovom primjeru za gornji sloj tla postavljena je vrijednost vodljivosti od 0,01 S/m, što odgovara otpornosti 100 Ω m, a za relativnu permitivnost postavljena je vrijednost od 10 (manja od vode koja iznosi 81). Potvrdom na tipku „OK“, novi definirani materijal pod nazivom „gornji_sloj_tla“ vidljiv je u bazi materijala, što je prikazano slikom 10.46.

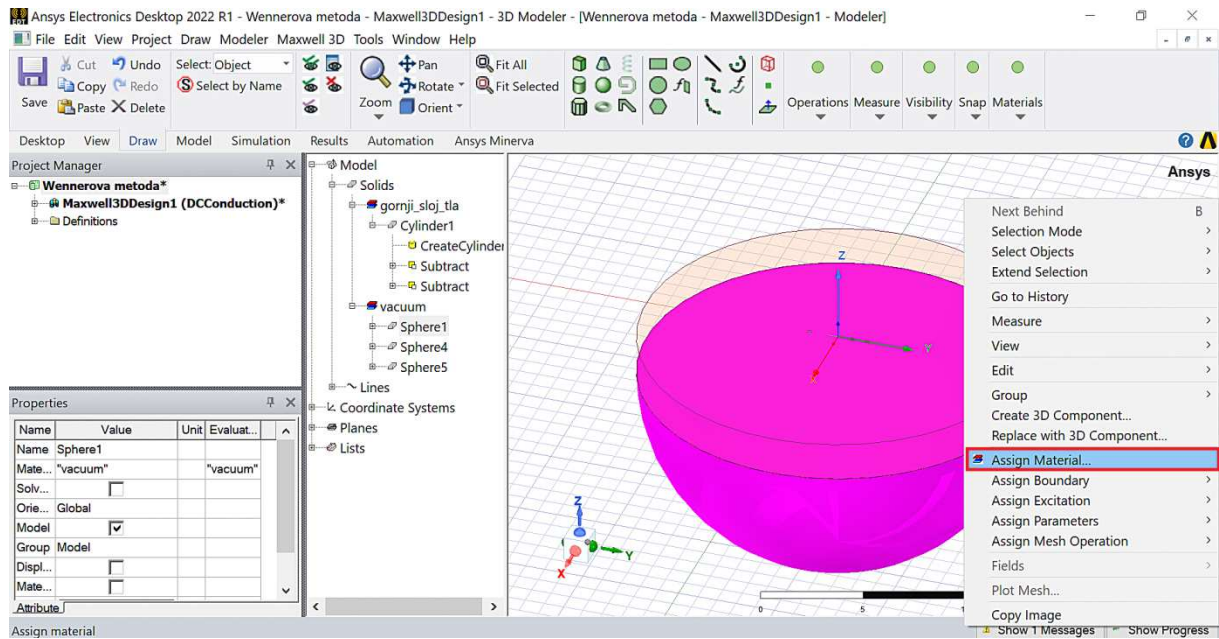


Slika 10.45 Definiranje naziva novog materijala i njegovih električnih svojstava.

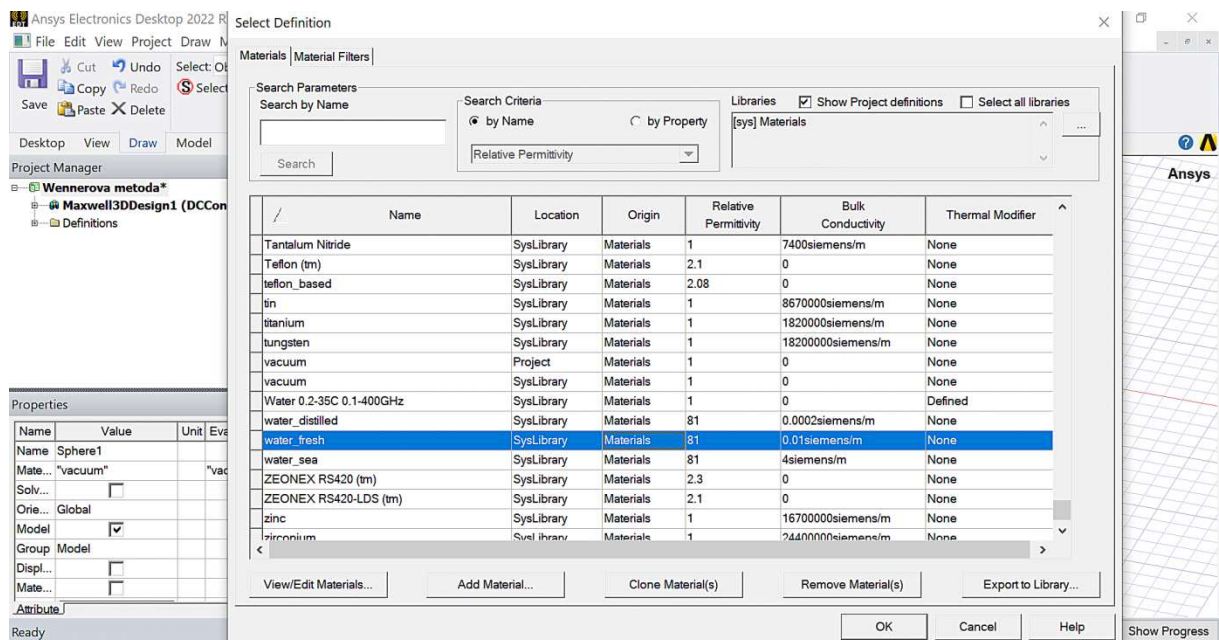


Slika 10.46 Novodefinirani materijal naziva „gornji_sloj_tla“ u bazi materijala.

Pridruživanje materijala donjem sloju tla obavlja se na način kako je to učinjeno za gornji sloj tla. Na radnoj je površini potrebno kliknuti na geometriju donjeg sloja tla (slika 10.47), a zatim nakon desnog klika miša otvara se izbornik u kojemu je potrebno odabrati „Assign Material“ kako je to prikazano slikom 10.47. Nakon klika na „Assign Material“ otvara se prozor prikazan na slici 10.48 u kojemu se bira materijal s najbližim električnim svojstvima (engl. *Water_fresh*) koja će biti izmijenjena, što se obavlja klikom na opciju „Clone Material(s)“.

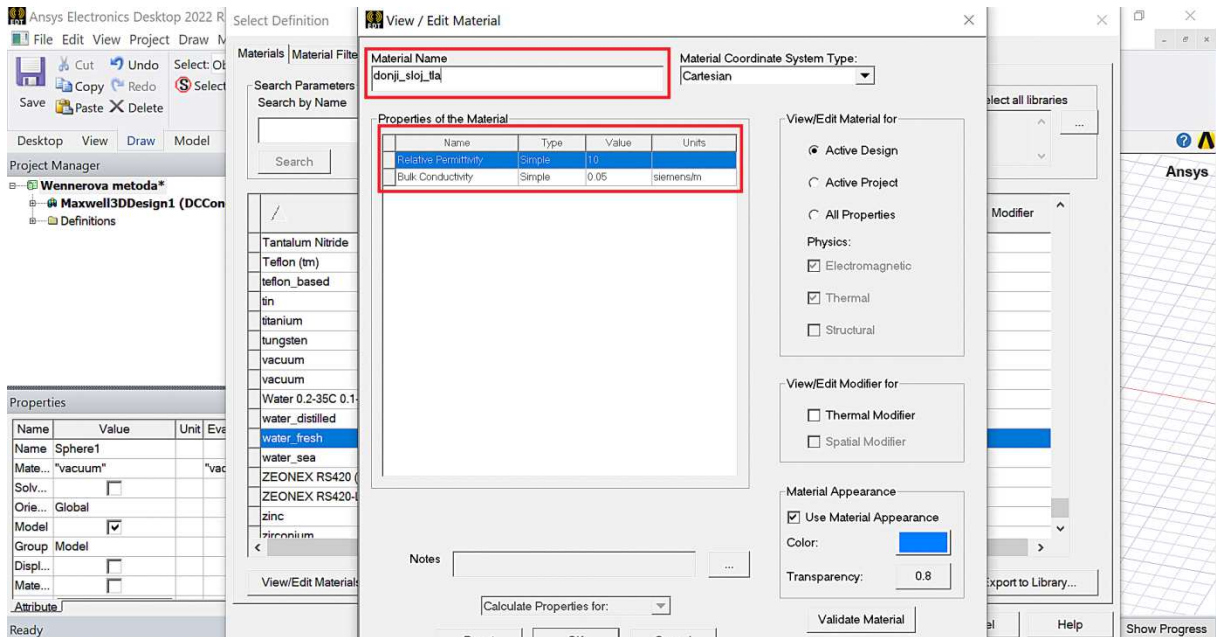


Slika 10.47 Izbor opcije „Assign Material“ polukugli kojom je modeliran donji sloj tla.

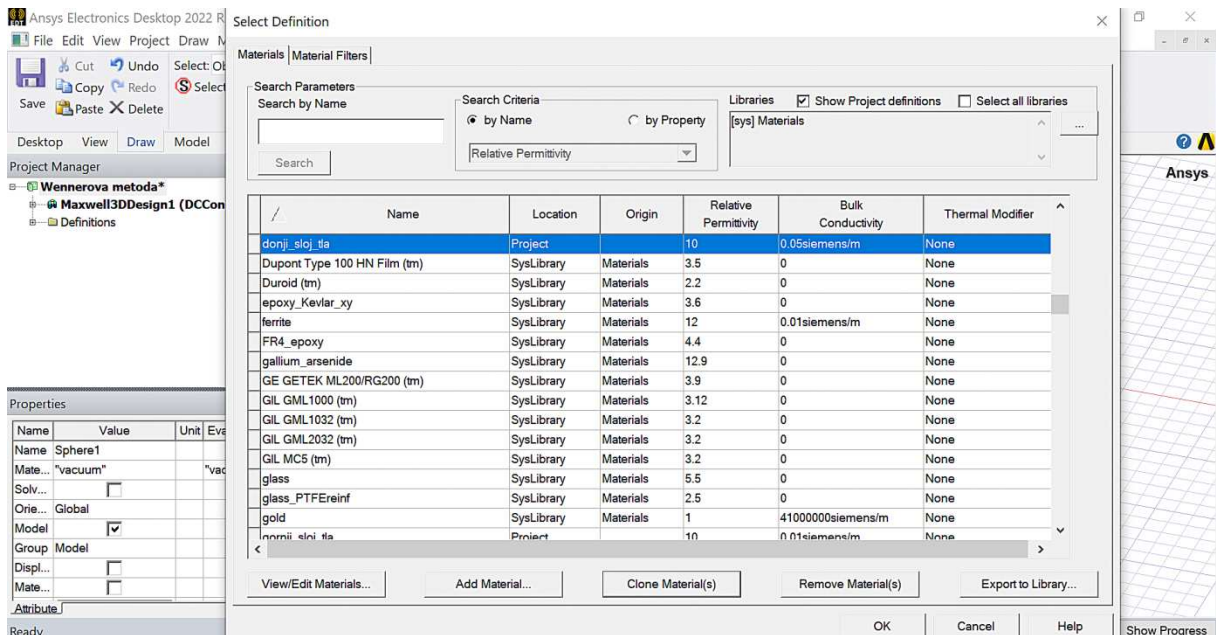


Slika 10.48 Izbor materijala sa sličnim električnim svojstvima i izbor opcije „Clone Material(s)“.

Klikom na „Clone Material(s)“ otvara se prozor prikazan slikom 10.49 u kojemu korisnik može promijeniti naziv materijala i njegova električna svojstva. U ovom primjeru za donji sloj tla postavljena je vrijednost vodljivosti od 0,05 S/m, što odgovara otpornosti od 20 Ω m, a za relativnu permitivnost vrijednost od 10. Nakon potvrde na tipku „OK“, novi definirani materijal pod nazivom „donji_sloj_tla“ vidljiv je u bazi materijala, što je prikazano slikom 10.50.

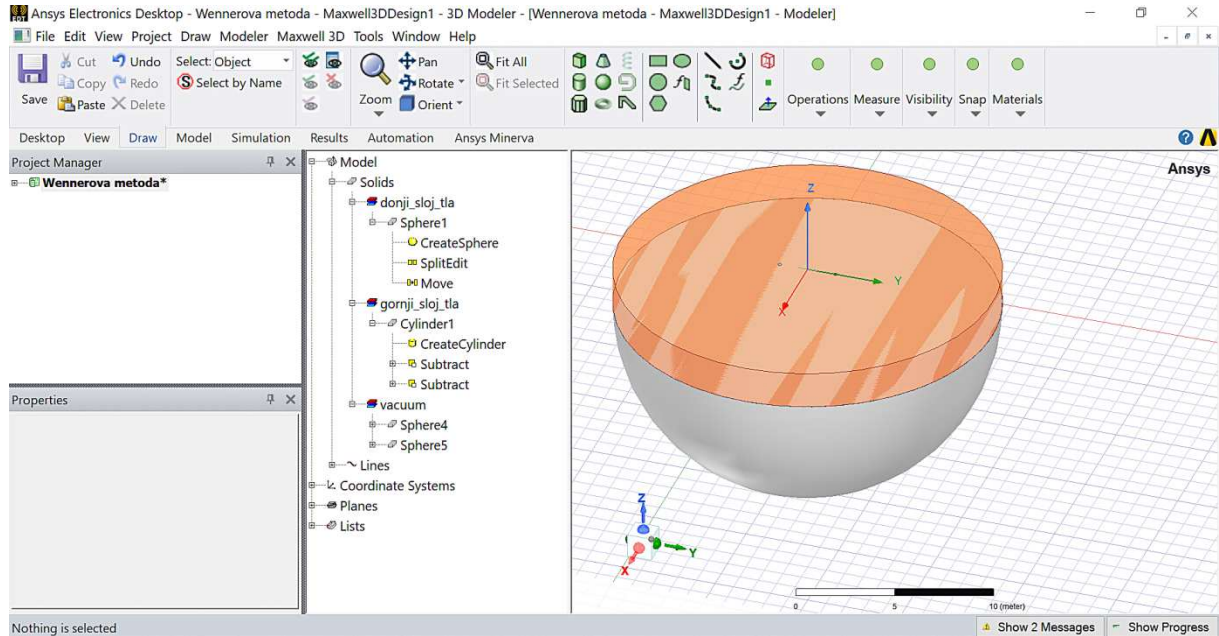


Slika 10.49 Definiranje naziva novog materijala i njegovih električnih svojstava.

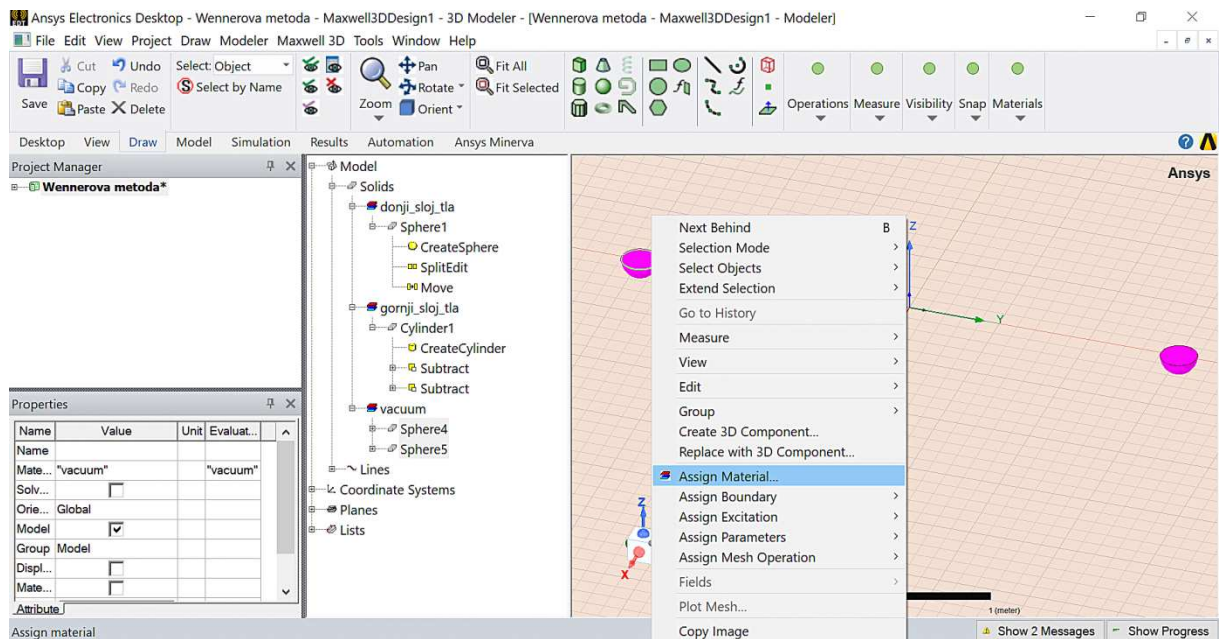


Slika 10.50 Novodefinirani materijal naziva „donji_sloj_tla“ u bazi materijala.

Pridruživanjem materijala gornjem i donjem sloju tla, u polju je modela vidljiva promjena (slika 10.51). U polju modela korisnik može vidjeti nove nazive materijala pridružene gornjem i donjem sloju tla (slika 10.51). Preostaje pridružiti materijal polukuglama kojima su modelirane strujne elektrode. Nakon istovremenog označavanja polukugli kojima su modelirane strujne elektrode, nakon desnog klika miša, otvara se izbornik u kojemu je potrebno odabrati „Assign Material“ kako je to prikazano slikom 10.52.

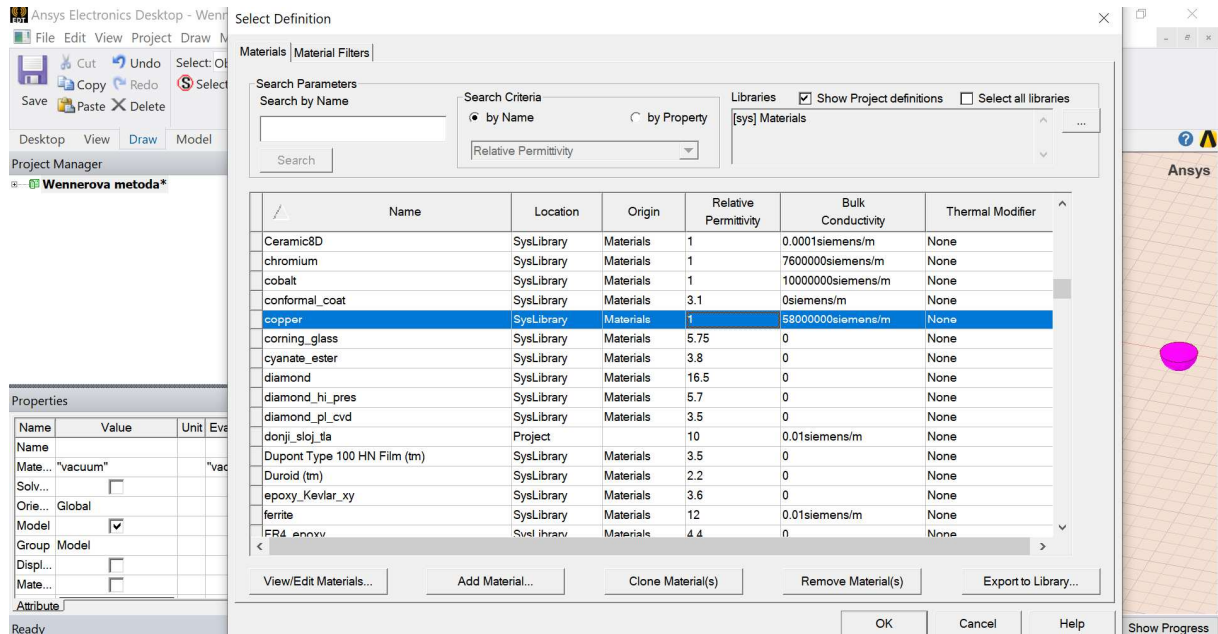


Slika 10.51 Novi nazivi materijala pridruženi gornjem i donjem sloju tla vidljivi u polju modela.

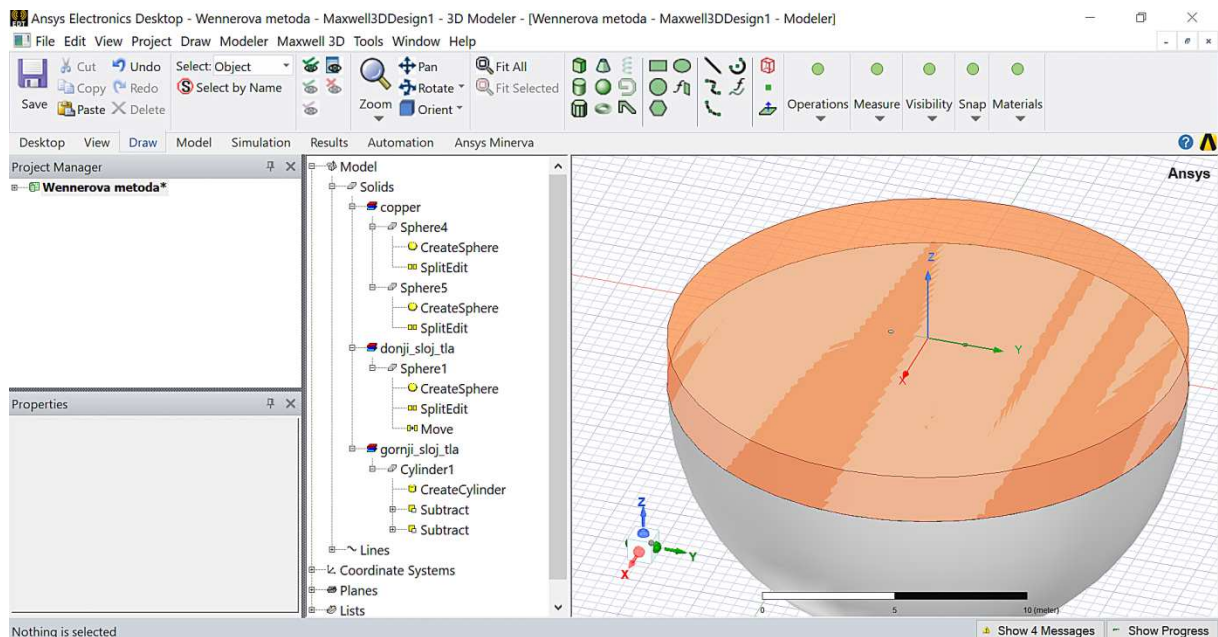


Slika 10.52 Pridruživanje materijala polukuglama kojima su modelirane strujne elektrode.

Klikom na „Assign Material“ otvara se prozor prikazan na slici 10.53 u kojemu je potrebno odabrati dobar vodič. Naime, s obzirom na prirodu ove elektromagnetske zadaće, varijacija u vodljivosti odabranog metala ima zanemariv utjecaj na numeričke rezultate. Iz toga razloga odabran je bakar (engl. *Copper*) kao što je prikazano slikom 10.53. Nakon klika na tipku „OK“ u polju modela vidljivi su svi materijali pridruženi pojedinim geometrijskim tijelima modela, što je vidljivo na slici 10.54.

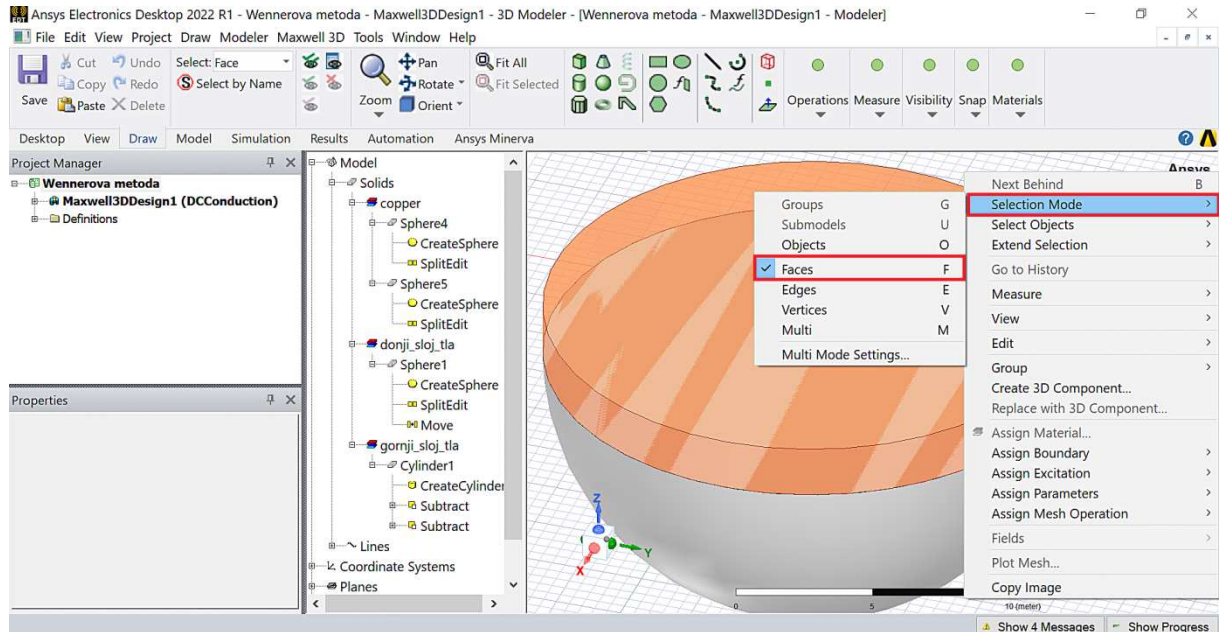


Slika 10.53 Izbor materijala, tj. bakra za materijale strujnih elektroda.

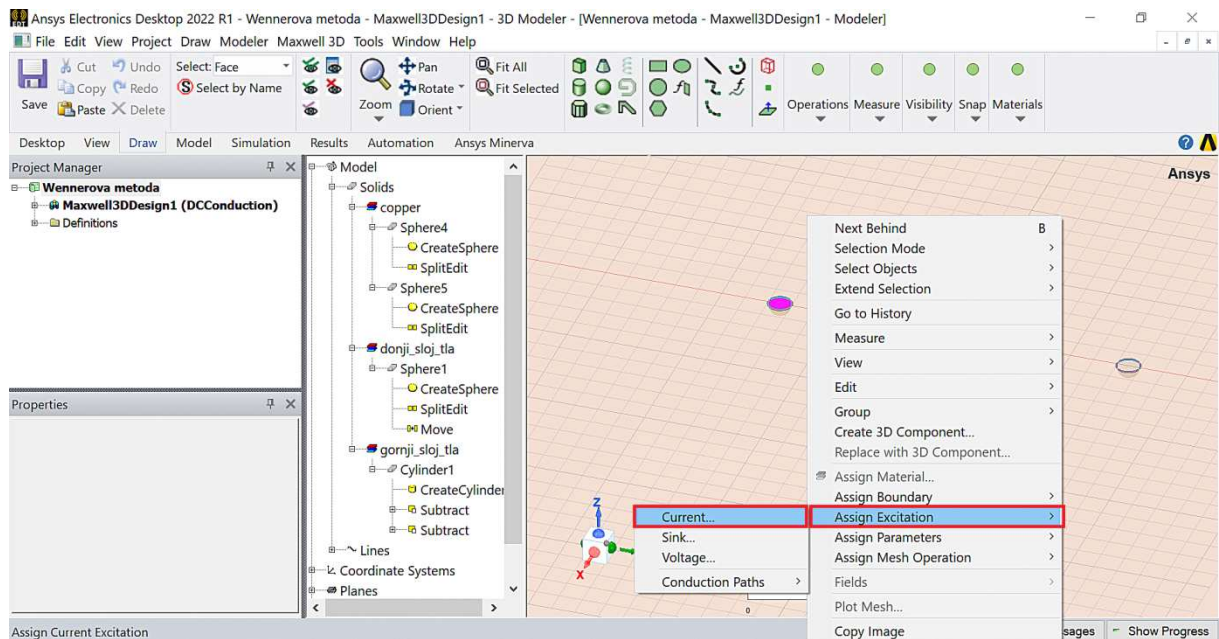


Slika 10.54 Novi nazivi materijala pridruženi svim geometrijskim tijelima modela.

Za pridruživanje odgovarajuće granice i pobuda sustava potrebno je promijeniti način na koji miš bira objekte, odnosno, promijeniti „*Selection Mode*“ iz objekata „*Objects*“, koji je korišten za pridruživanje materijala, u „*Faces*“, kojime se biraju lica geometrijskih tijela (slika 10.55). Pridruživanje strujne pobude lijevoj strujnoj elektrodi ($y = -1.5a$) obavlja se izborom opcija „*Assign Excitation*“ i „*Current*“, što je prikazano slikom 10.56.

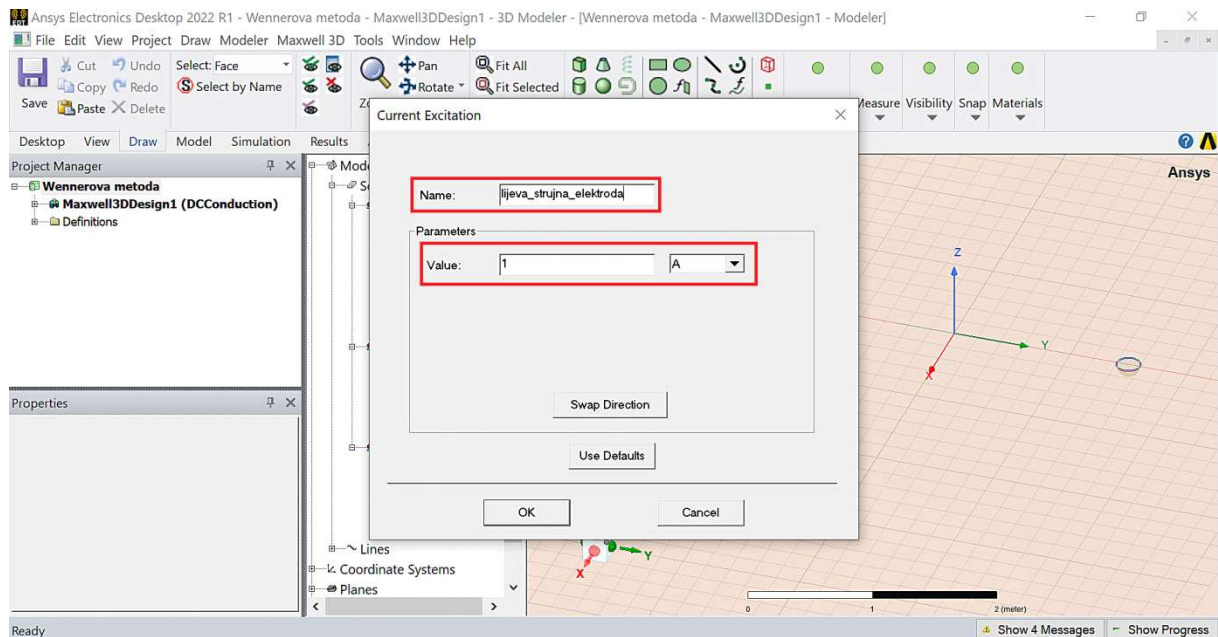


Slika 10.55 Izbor načina biranja na lica (engl. *Faces*) geometrijskih tijela.

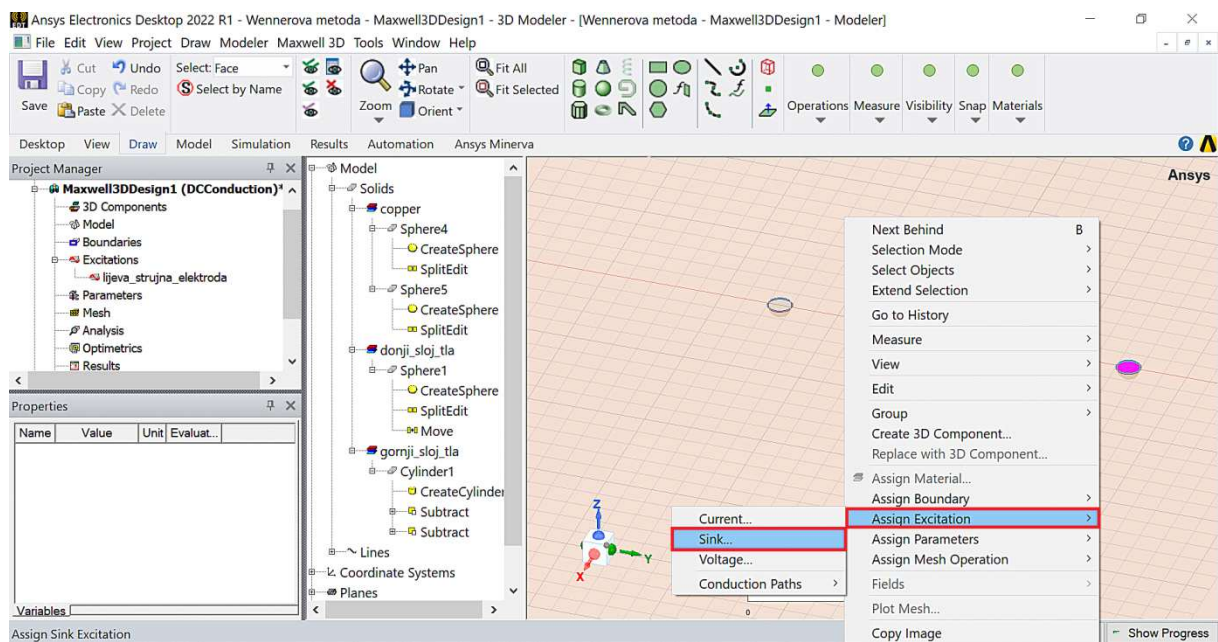


Slika 10.56 Pridruživanje strujne pobude lijevoj strujnoj elektrodi.

Nakon prethodne radnje automatski se otvara prozor u kojemu je moguće promijeniti naziv strujne pobude te zadati jakost struje koja se utiskuje u gornju plohu cilindra kojom je predstavljena strujna elektroda (slika 10.57). Iznos struje postaviti na 1 A. Postupak pridruživanja strujne pobude potrebno je ponoviti i za desnu strujnu elektrodu koja je na poziciji $y=1.5a$ (slika 10.58). Pobuda desne elektrode treba biti strujni uvor (engl. *Current Sink*) jer će u suprotnom Ansys prijavljivati pogrešku u modeliranju.

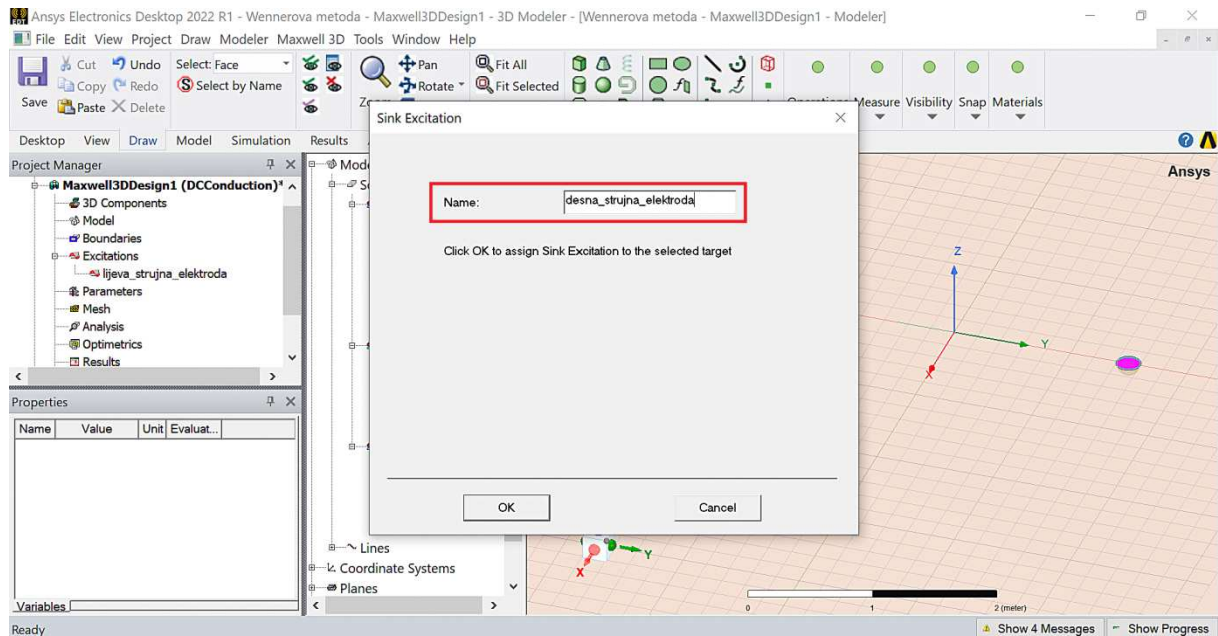


Slika 10.57 Zadavanje jakosti struje utisnute u lijevu strujnu elektrodu.

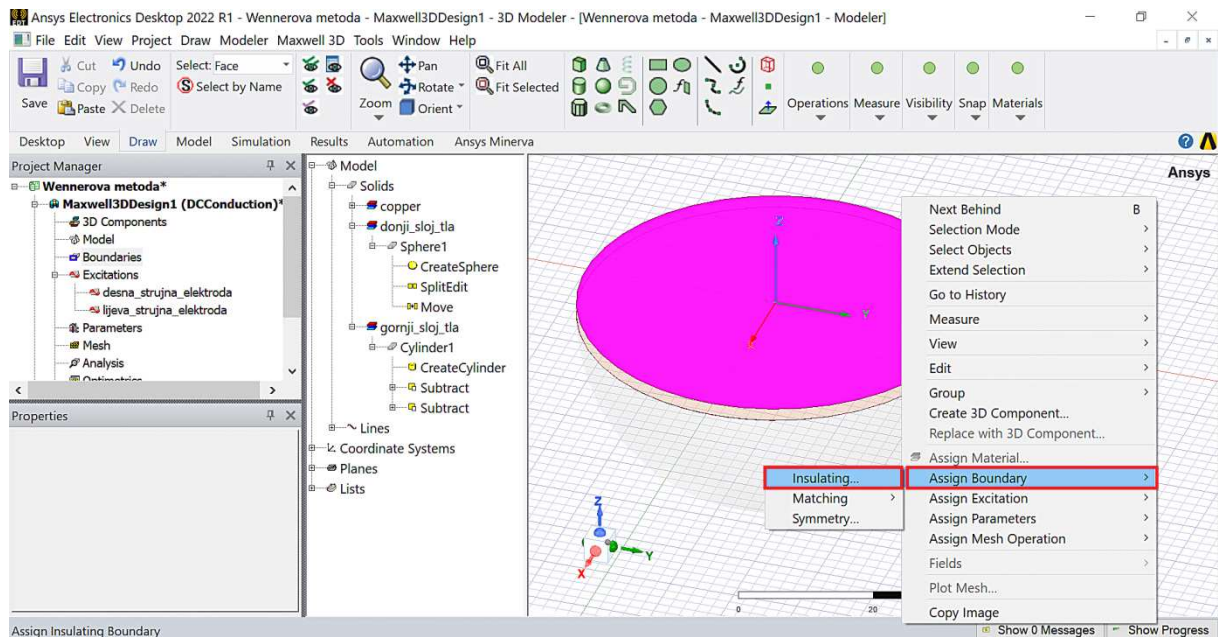


Slika 10.58 Pridruživanje strujne pobude desnoj strujnoj elektrodi.

Pridruživanjem strujnog uvora desnoj elektrodi automatski se otvara prozor u kojemu je moguće promijeniti naziv strujnom uvoru (slika 10.59). Pridruživanje izolirajućeg graničnog uvjeta (engl. *Insulating Boundary*) gornjoj plohi tla obavlja se na način kako je to prikazano slikom 10.60.

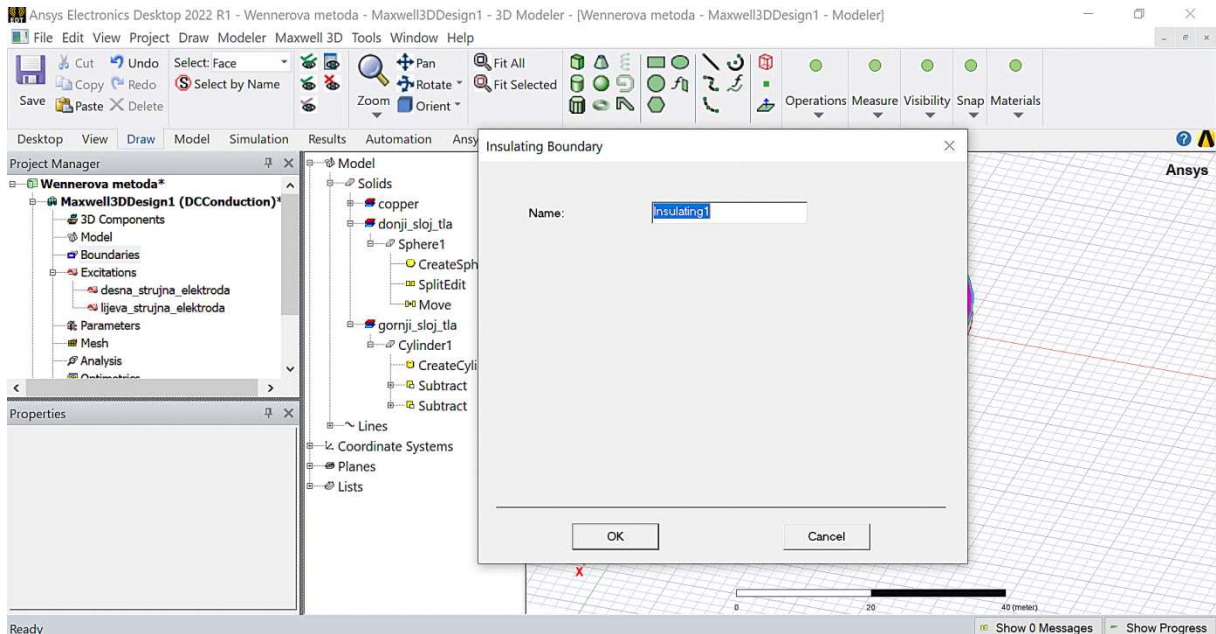


Slika 10.59 Prozor u kojemu je moguće promijeniti naziv strujnog uvora.

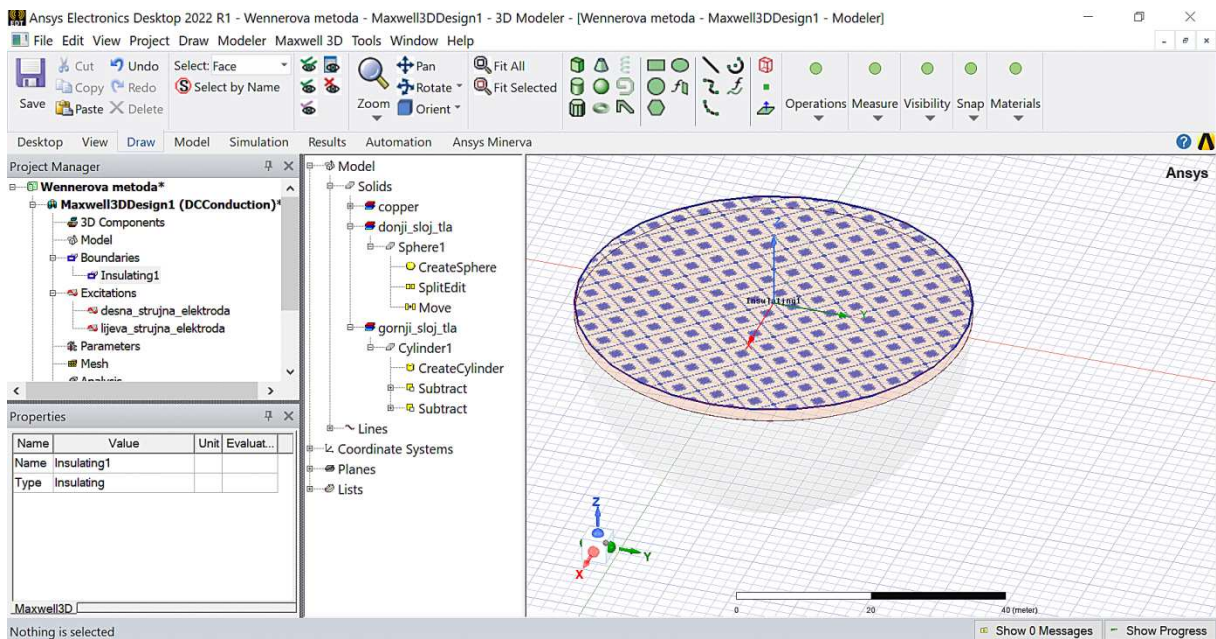


Slika 10.60 Pridruživanje graničnog uvjeta gornjoj plohi tla.

Nakon izbora graničnog uvjeta „*Insulating Boundary*“ automatski se otvara prozor u kojemu je moguće promijeniti njegov naziv (slika 10.61). Nakon klika na tipku „*OK*“ u polju „*Project Manager*“ dolazi do promjene te je moguće vidjeti da je definiran granični uvjet i njegov naziv (slika 10.62). Klikom na naziv graničnog uvjeta u polju „*Project Manager*“, na radnoj površini, gornja ploha tla postaje osjenčana s prikazom naziva graničnog uvjeta (slika 10.62).

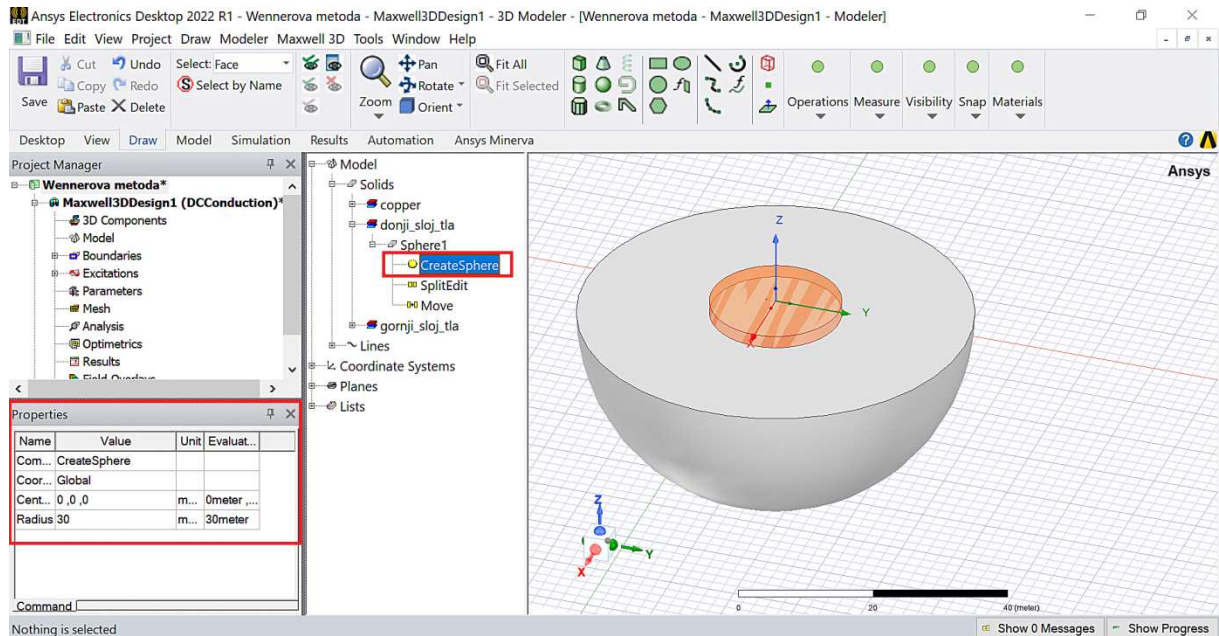


Slika 10.61 Prozor u kojemu je moguće promijeniti naziv graničnog uvjeta.

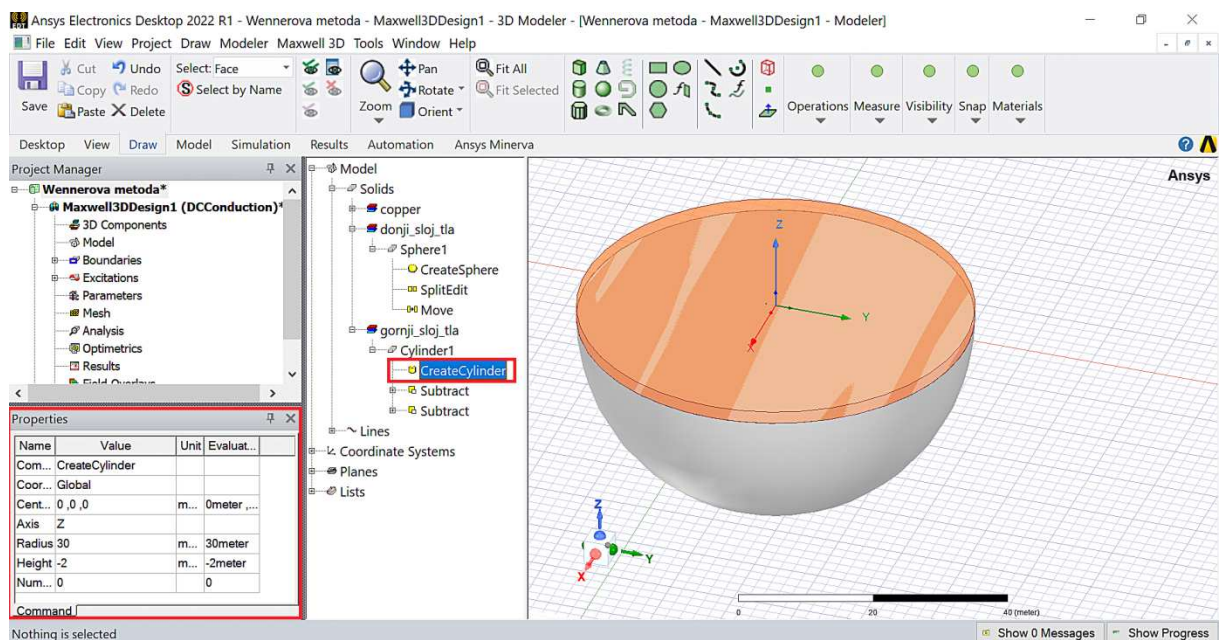


Slika 10.62 Grafički prikaz položaja, vrste i naziva graničnog uvjeta.

Prethodno je, radi preglednosti i lakšeg biranja objekata za polumjere gornjeg i donjeg sloja tla, zadana vrijednost $R = 10$ m. Kako se biranje objekata unutar geometrijskog dijela modela neće više obavljati, potrebno ih je promijeniti na vrijednost koja daje dovoljno veliki omjer model tla spram najvećeg razmaka koji će se pojaviti između strujnih elektroda. Time će utjecaj konačnih dimenzija domene unutar koje se odvija proračun na točnost rezultata biti unutar granica koje su prihvatljive. Za nove vrijednosti polumjera gornjeg i donjeg sloja tla usvojena je vrijednost $R = 30$ m (slika 10.63 i slika 10.64).

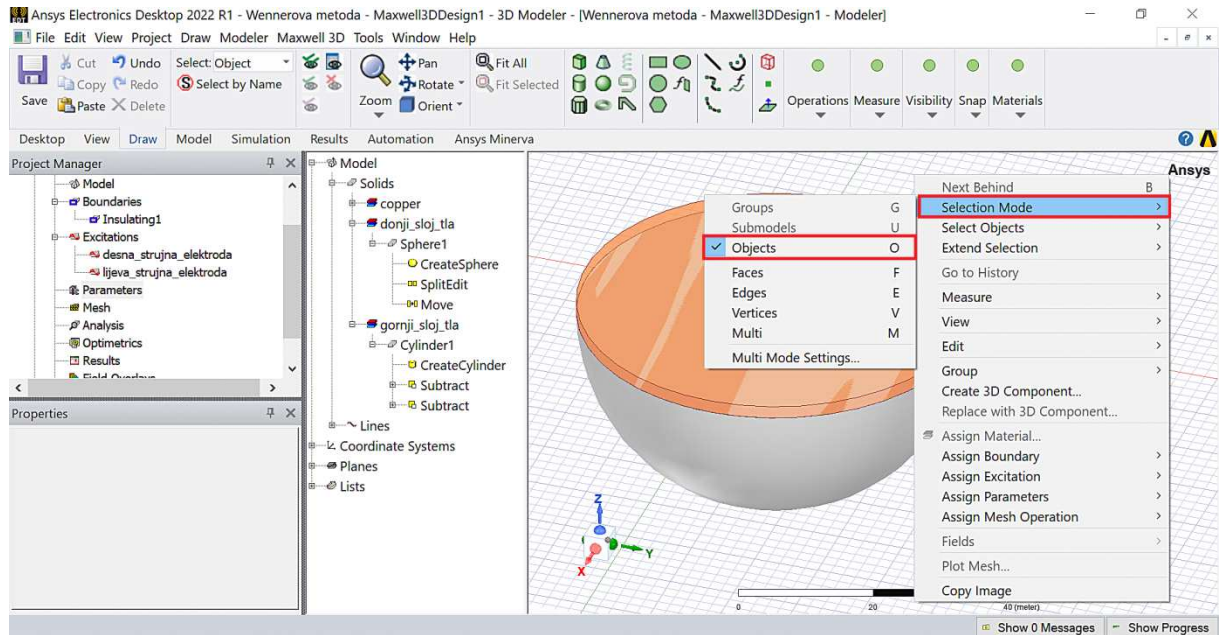


Slika 10.63 Novi polumjer donjeg sloja tla.

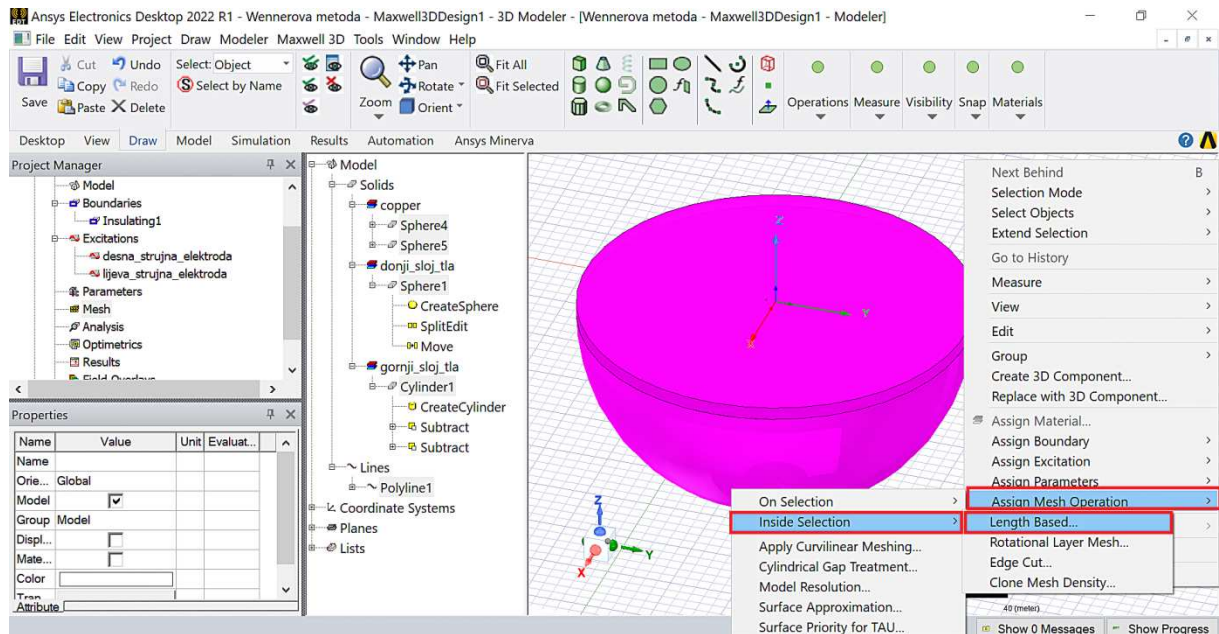


Slika 10.64 Novi polumjer gornjeg sloja tla.

Za prethodne radnje način izbora geometrijskih elemenata bio je postavljen na lica geometrijskih tijela („*Selection Mode/Faces*“). Kako bi se pridružila mreža geometriji modela i provelo segmentiranje na konačne elemente potrebno je promijeniti način izbora geometrijskih elemenata na objekte („*Selection Mode/Objects*“), što je prikazano slikom 10.65. Nakon selektiranja svih geometrijskih tijela proces zadavanja radnje za izgradnju mreže obavlja se kako je prikazano slikom 10.66.



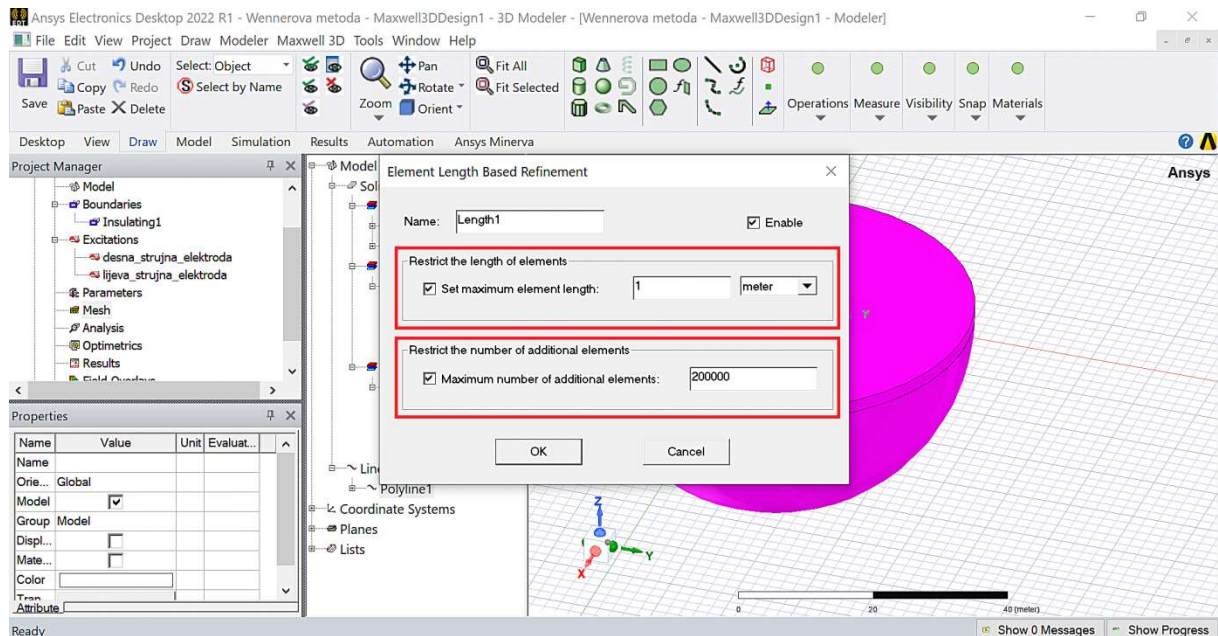
Slika 10.65 Postavljanje biranja geometrijskih elemenata na objekte.



Slika 10.66 Postupak zadavanja radnje za generiranje mreže na označenoj geometriji.

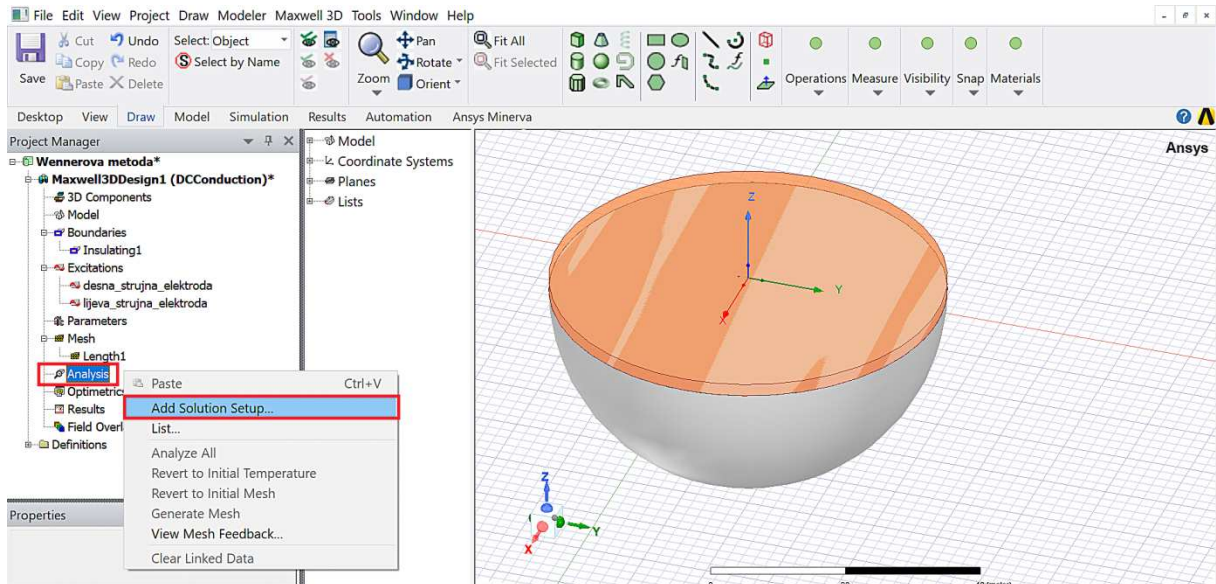
Nakon provedenih koraka prikazanih na prethodnoj slici automatski se otvara prozor u kojemu je moguće zadati parametre vezane uz maksimalnu duljinu elemenata i njihov maksimalni broj (slika 10.67). Što je maksimalna duljina elementa manja i što je broj elemenata veći, točniji je proračun primjenom metode konačnih elemenata, ali je trajanje proračuna dulje. Također, ukupan broj elemenata koji se može zadati određen je raspoloživom memorijom računala. Radi navedenog, za maksimalnu duljinu elemenata i maksimalni broj elemenata postavlja se kompromisna vrijednost. Na primjer, za računalo sa 16 GB RAM-a mogu se postaviti vrijednosti prikazane slikom 10.67.

Prilikom provedbe numeričkog proračuna poželjno je pratiti korištenje resursa računala (opterećenje CPU-a i zauzeće RAM-a). Na taj način korisnik stječe iskustvo kako postavljene vrijednosti za maksimalnu duljinu elemenata, i njihov maksimalni broj utječe na zauzeće RAM-a. U tu svrhu može poslužiti program „*Task Manager*“ koji je sastavni dio Windows operacijskog sustava. Na primjer, za postavljene vrijednosti prikazane slikom 10.67, program Ansys koristio je nešto više od polovine raspoložive RAM memorije. Stoga je bilo moguće postaviti veće vrijednosti, negoli što su navedene na slici 10.67. Ujedno, praćenjem korištenja resursa računala također se stječe iskustvo i o utjecaju drugih parametara simulacije na opterećenje CPU-a i zauzeće RAM-a. Na primjer, parametara simulacije prikazanih na slici 10.69.

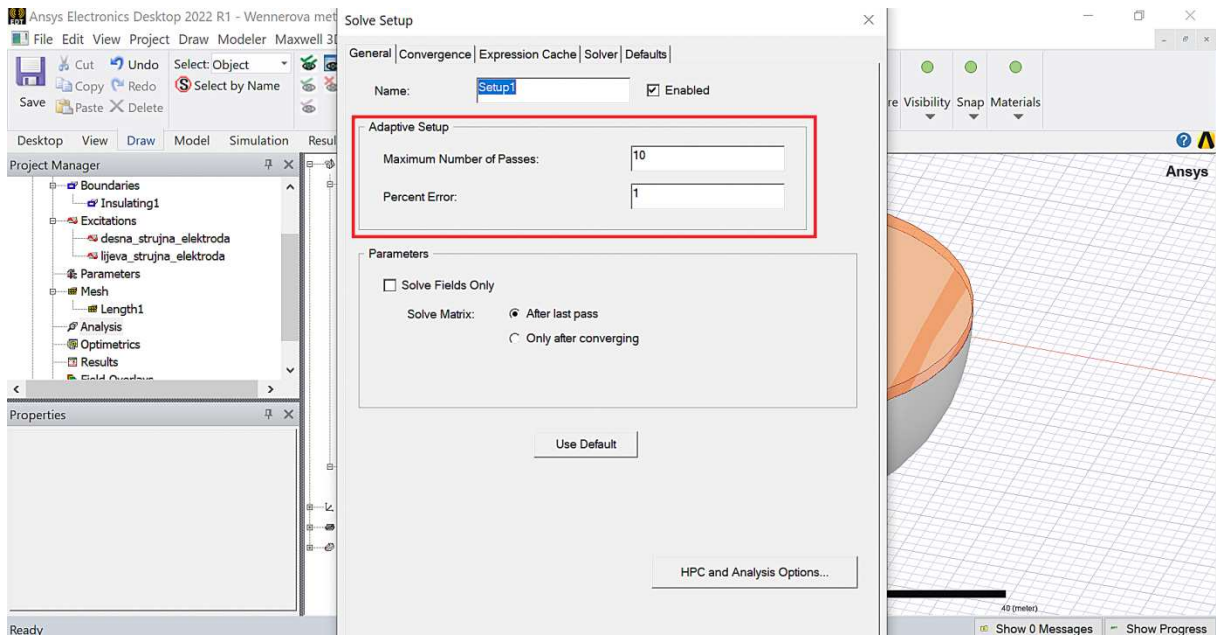


Slika 10.67 Definiranje maksimalne duljine i broja elemenata.

Prije pokretanja simulacije u programskom paketu Ansys potrebno je postaviti parametre simulacije. Navedeno se obavlja desnim klikom miša u polju pod nazivom „*Project Manager*“ na opciji pod nazivom „*Analysis*“, nakon čega se pojavljuje izbornik u kojemu treba odabrati opciju „*Add Solution Setup*“ (slika 10.68). Nakon izbora opcije „*Add Solution Setup*“ automatski se pojavljuje plutajući prozor prikazan slikom 10.69. Ovisno o vrsti simulacije i željenoj točnosti, zadane vrijednosti parametara simulacije mogu se promijeniti. U ovom primjeru ostavljene su vrijednosti koje je predložio Ansys (slika 10.69).

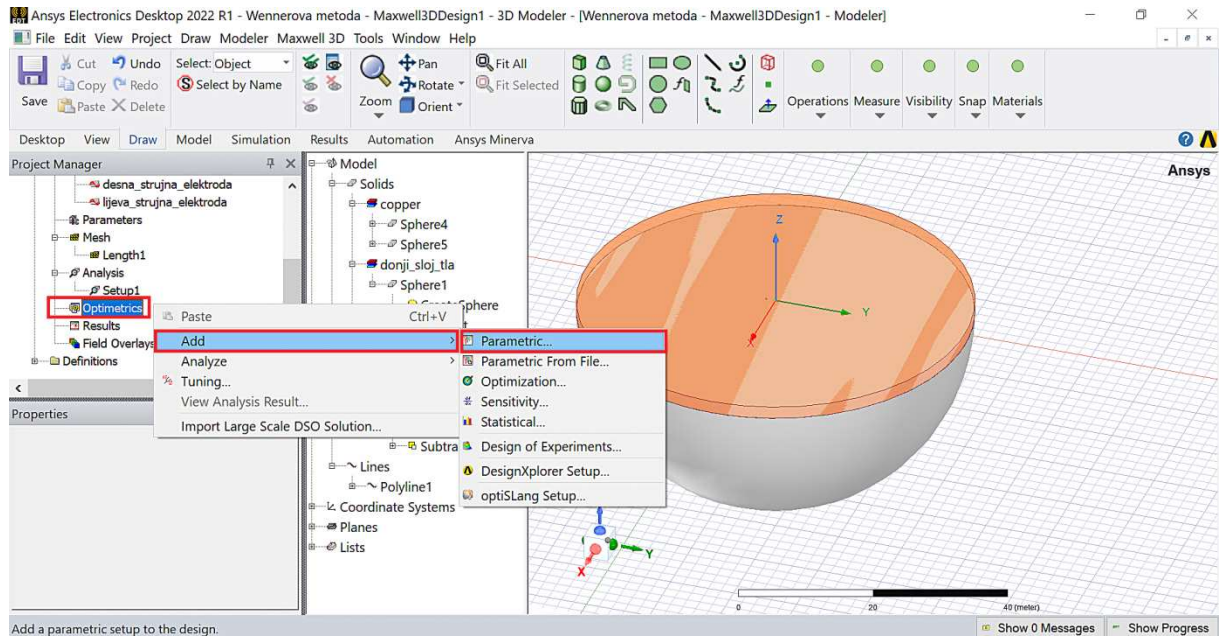


Slika 10.68 Izgled glavnog prozora nakon desnog klika miša na opciju „*Analysis*“.

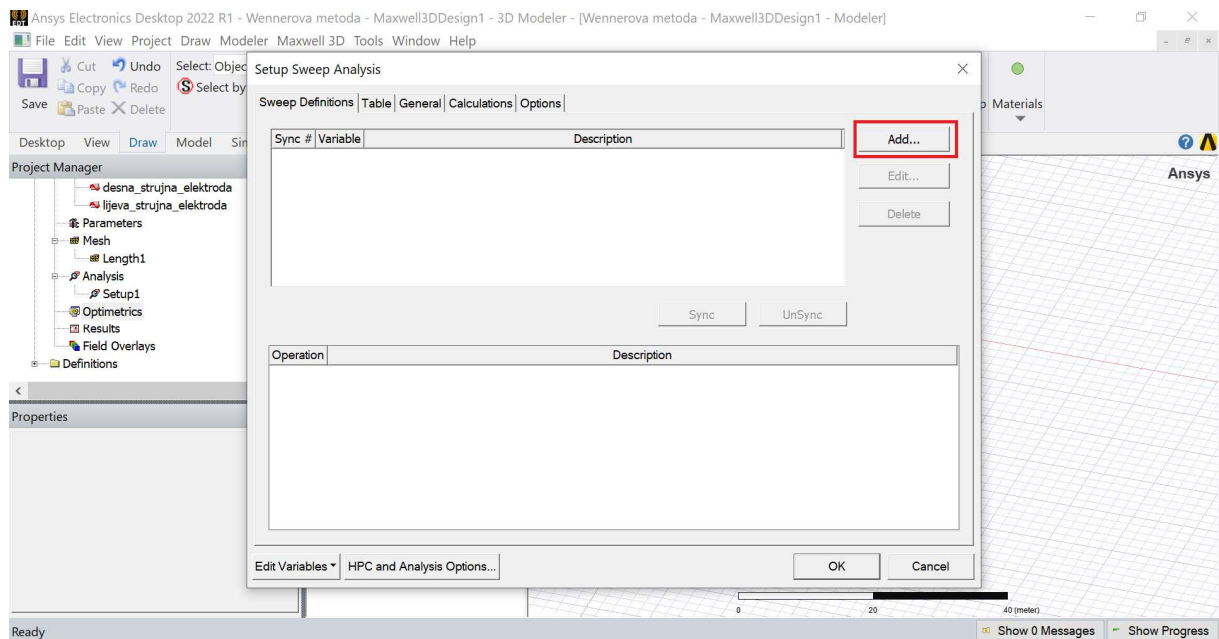


Slika 10.69 Zadavanje parametara simulacije.

U ovom primjeru potrebno je odrediti ovisnost prividne otpornosti o razmaku između susjednih elektroda (parametar „ a “), počevši od razmaka $a = 0,5$ m pa sve do razmaka $a = 10$ m, u koracima od 0,5 m. Kako se numerički proračun ne bi morao ručno pokretati, za svaku pojedinu vrijednost razmaka između susjednih elektroda proces se može automatizirati korištenjem opcije „*Optimetrics*“. U polju „*Project Manager*“ potrebno je kliknuti na opciju „*Optimetrics*“, zatim nakon desnog klika miša odabrati opciju „*Add*“ te opciju „*Parametric*“ na način kako je prikazano slikom 10.70. Nakon navedenih koraka otvara se prozor prikazan slikom 10.71 u kojemu je potrebno kliknuti na gumb pod nazivom „*Add*“.

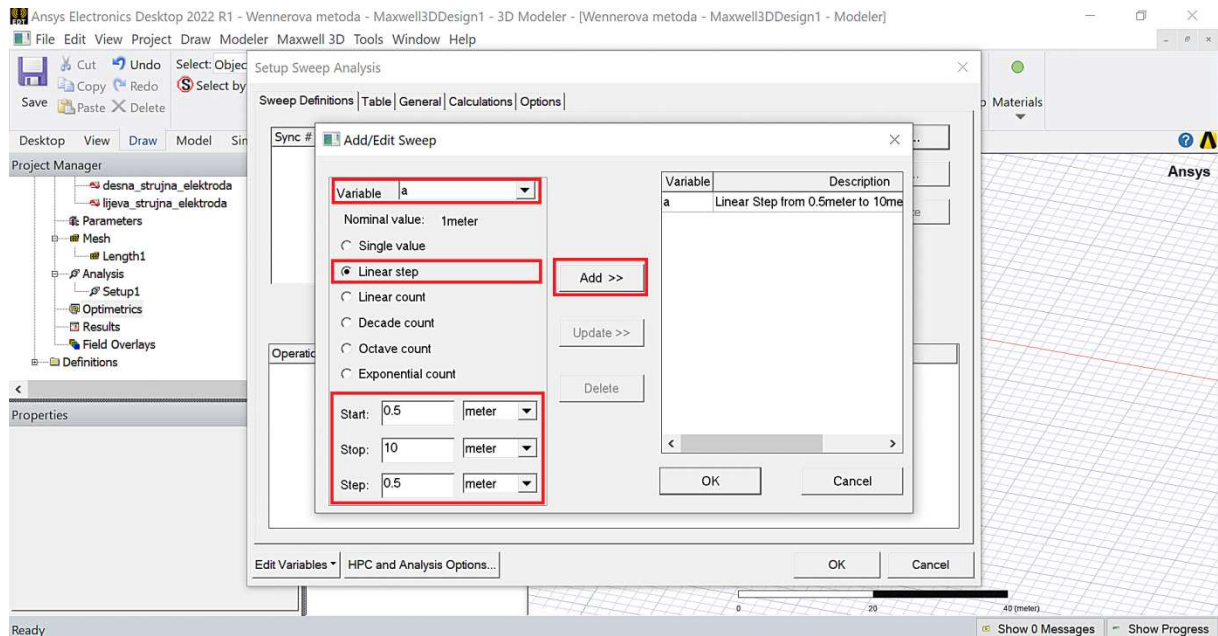


Slika 10.70 Izbor opcije „*Optimetrics*“.

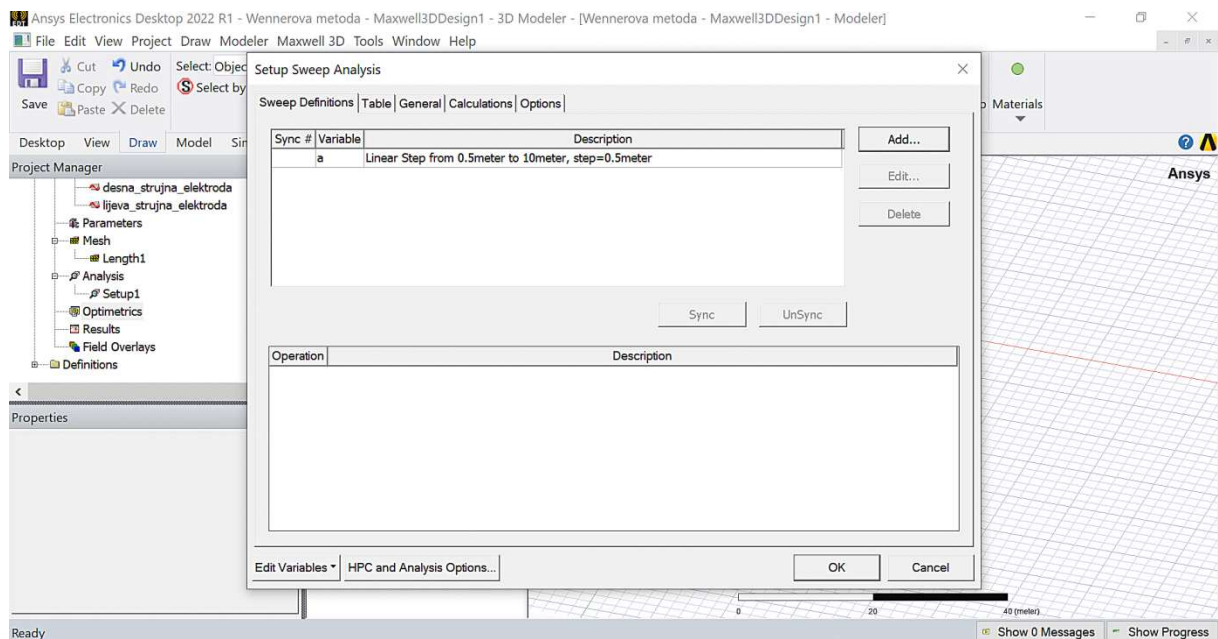


Slika 10.71 Prozor za definiranje i upravljanje varijablama/parametarima.

Klikom na gumb pod nazivom „Add“ otvara se prozor prikazan slikom 10.72. Nakon postavljanja vrijednosti prikazanih slikom 10.72 potrebno je kliknuti na gumb pod nazivom „Add“. Nakon klika na gumb, pod nazivom „Add“, u desnom prozoru, pojavljuje se kratki opis varijable „a“ koji glasi „Linear Step from 0.5 m to 10 meter“. Klikom na gumb pod nazivom „OK“ otvara se prozor prikazan slikom 10.73.

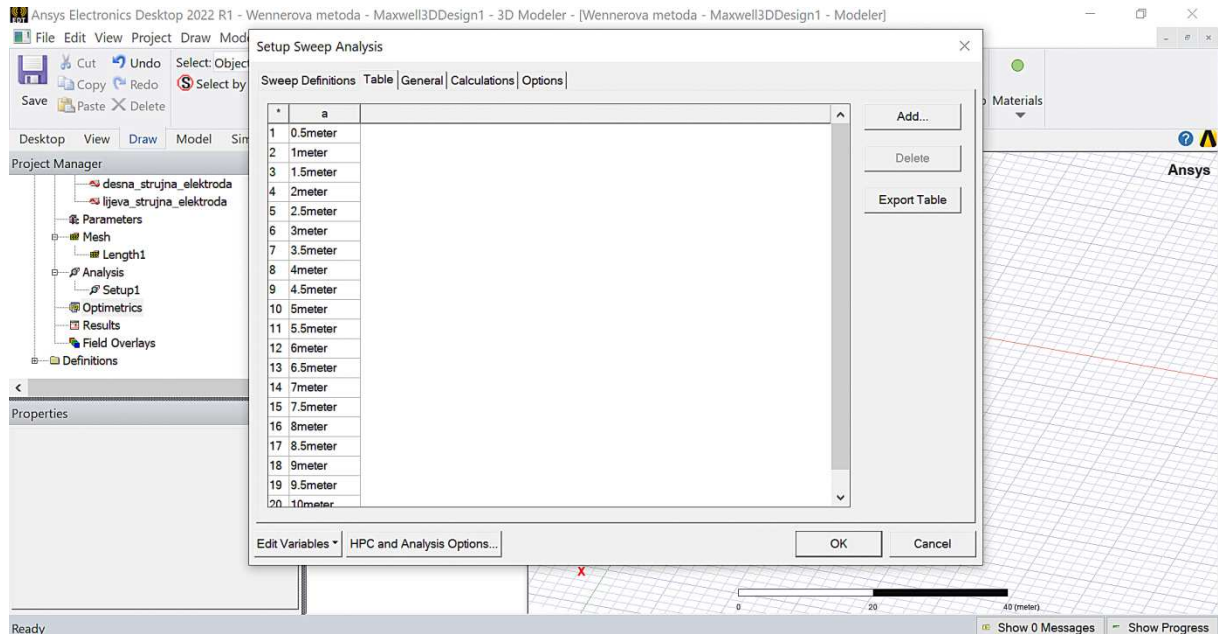


Slika 10.72 Definiranje početne vrijednosti, krajnje vrijednosti i koraci varijable „a“.

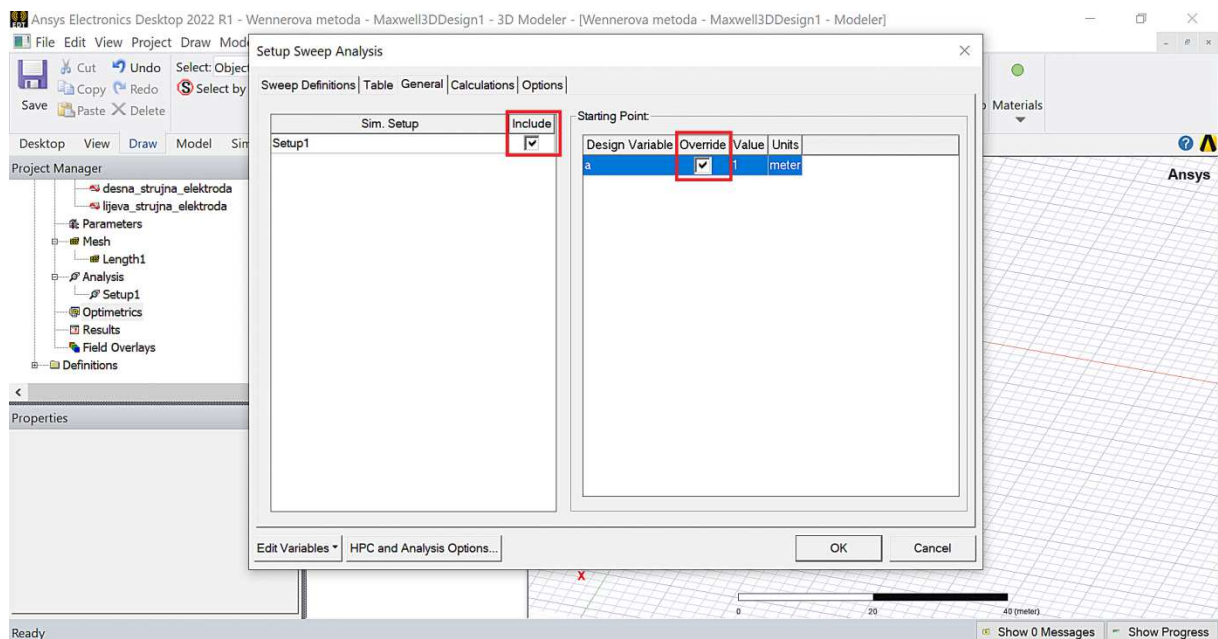


Slika 10.73 Kratak opis novodefinirane varijable „a“.

Pristup brojčanim vrijednostima novodefiniranih diskretnih vrijednosti varijable „a“ obavlja se klikom na opciju „Table“ nakon čeka se otvara prozor prikazan slikom 10.74. Klikom na opciju „General“ otvara se prozor prikazan slikom 10.75 u kojemu je potrebno postaviti kvačice na pozicijama označenim crvenim pravokutnicima. Time se daje do znanja programu Ansys da koristi novodefinirane diskretne vrijednosti varijable „a“.

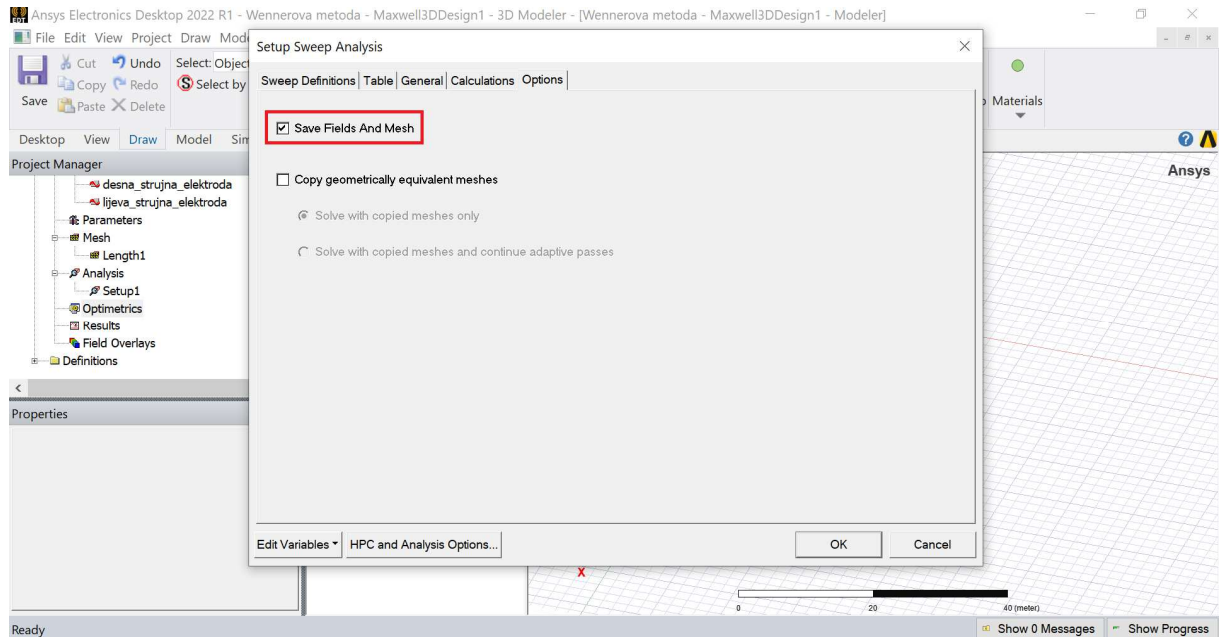


Slika 10.74 Brojčane vrijednosti novodefiniranih diskretnih vrijednosti varijable „a“.

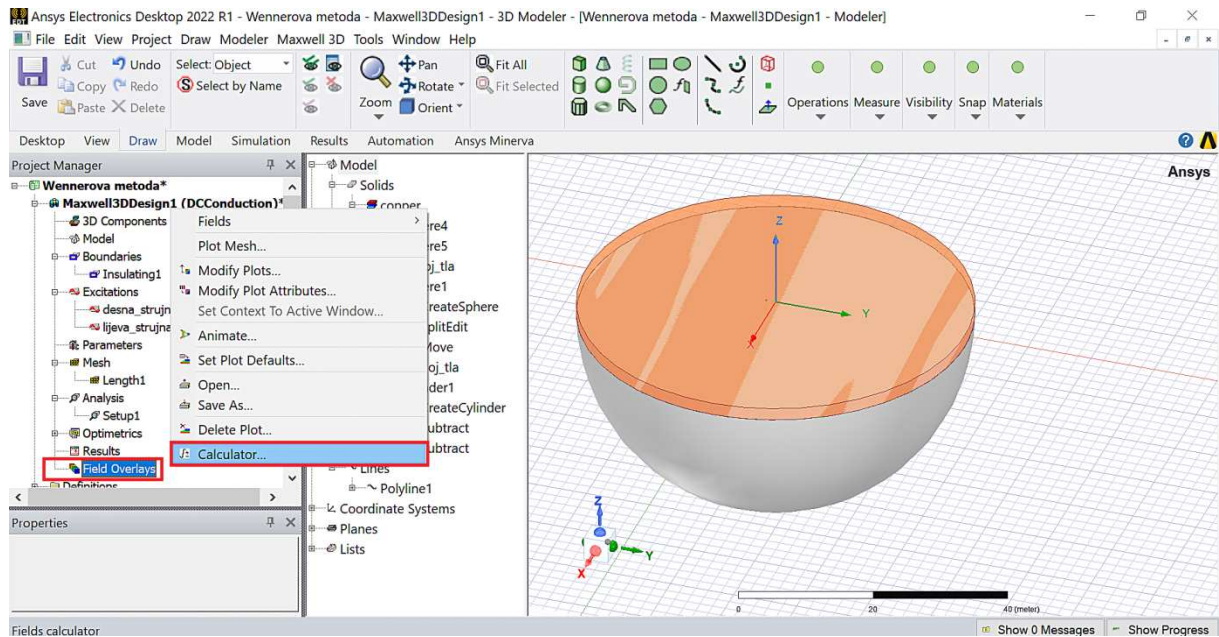


Slika 10.75 Naznačavanje programu (upotrebom kvačica) da koristi novodefinirane diskretne vrijednosti varijable „a“.

Klikom na opciju „*Options*“ otvara se prozor prikazan slikom 10.76 u kojemu je potrebno kvačicom potvrditi izbor opcije „*Save Fields And Mesh*“. Nakon toga potrebno je kliknuti na gumb pod nazivom „*OK*“, čime završavaju sve radnje vezane uz novodefinirane diskretne vrijednosti varijable „*a*“. Definiranje prividne otpornosti tla obavlja se korištenjem tzv. kalkulatora (opcija „*Calculator*“) kojoj se pristupa iz polja „*Project Manager*“ klikom na opciju „*Field Overlays*“, a zatim na opciju „*Calculator*“ kako je to prikazano slikom 10.77.

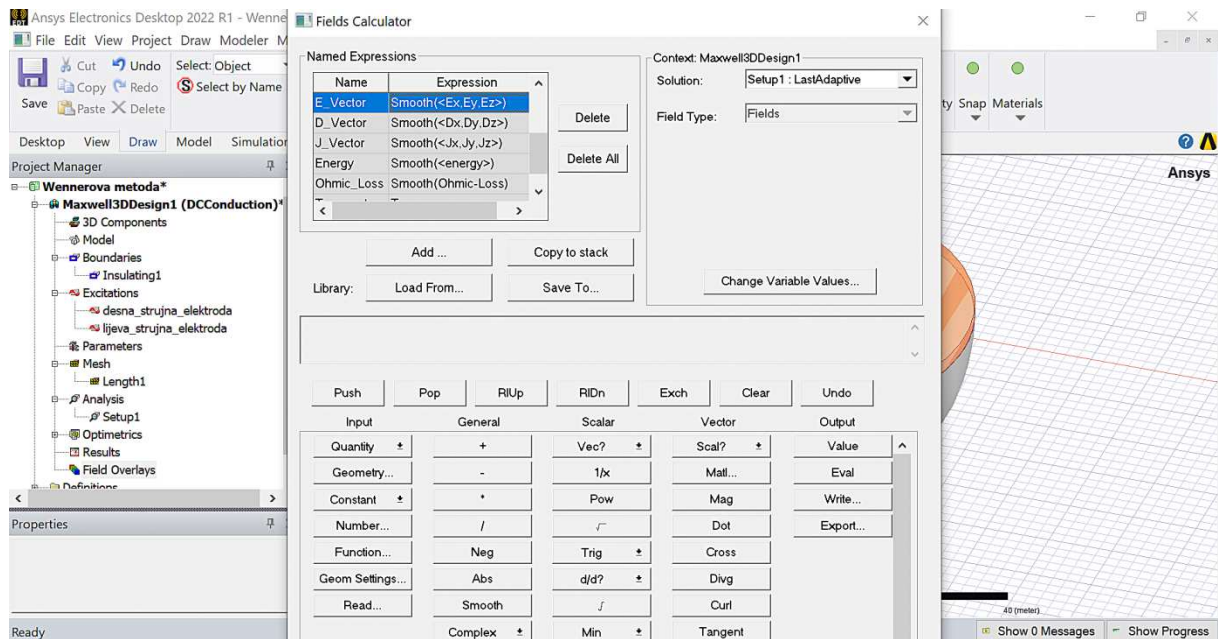


Slika 10.76 Izbor opcije „*Save Fields And Mesh*“.



Slika 10.77 Izbor opcije „*Calculator*“.

Nakon klika na opciju „*Calculator*“ otvara se prozor prikazan slikom 10.78.



Slika 10.78 Prozor kalkulatora „*Calculator*“.

Prividna otpornost dvoslojnog tla mjerena Wennerovom metodom određena je izrazom:

$$\rho = 2\pi a \cdot \frac{U}{I}, \quad (10-1)$$

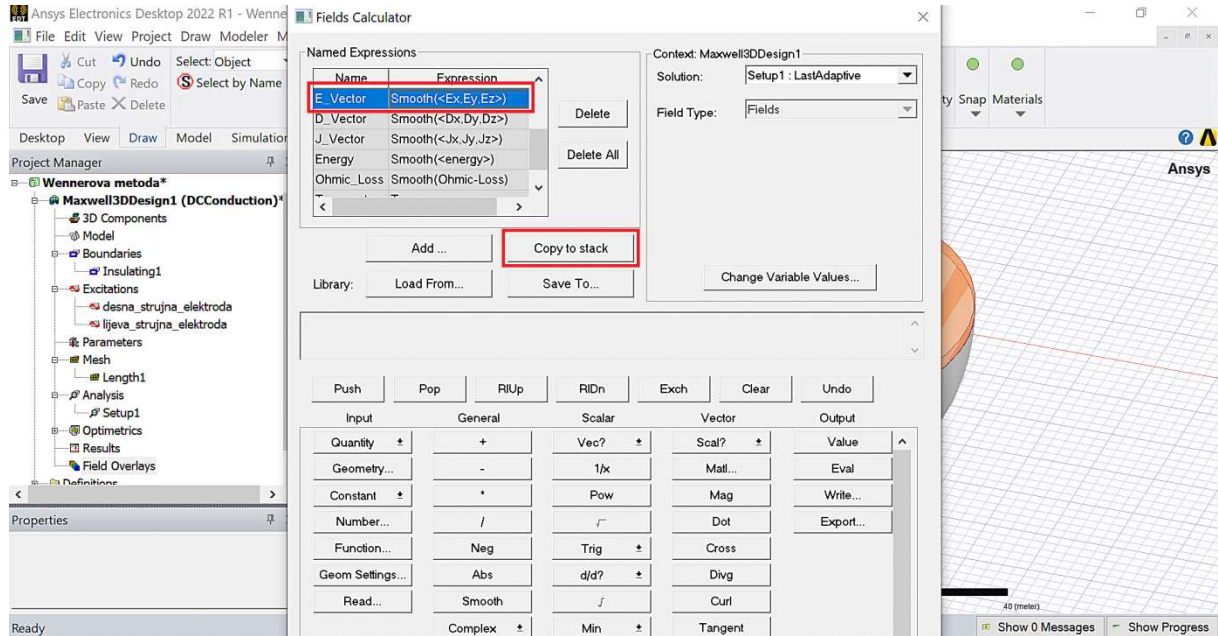
gdje je U napon između naponskih elektroda, I struja koja teče između strujnih elektroda, a razmak između susjednih elektroda.

Napon U između naponskih elektroda, koji bi se u praksi izmjerio voltmetrom, također je određen linijskim integralom:

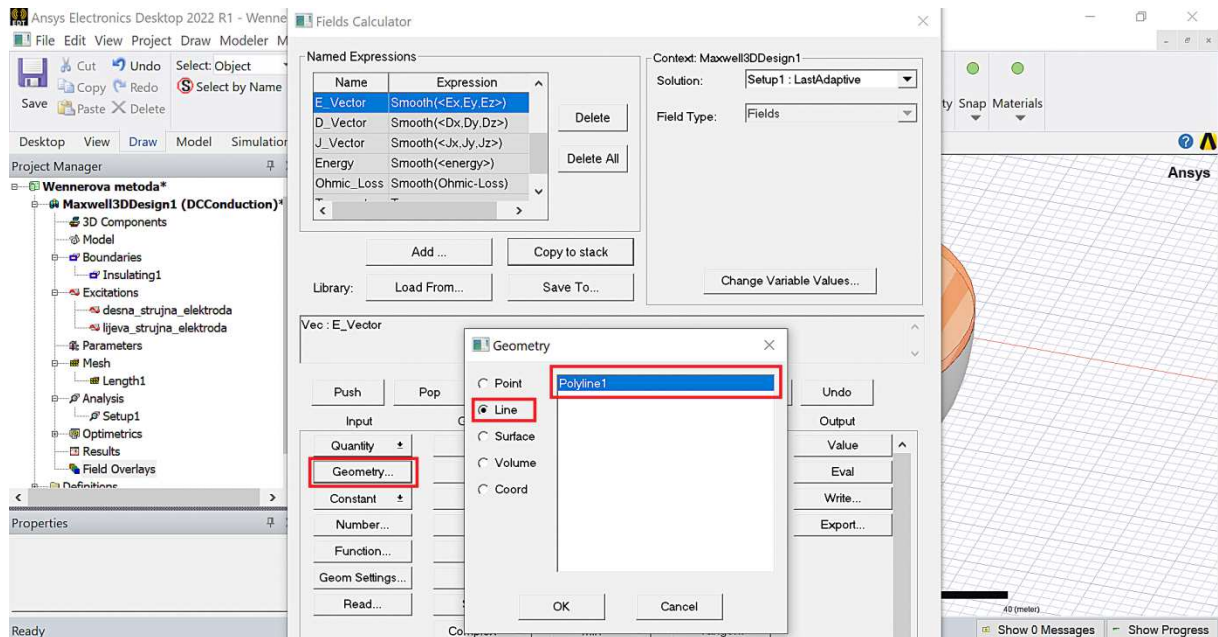
$$U = \int_c \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (10-2)$$

duž krivulje integracije „ c “ koja se odvija duž segmenta pravca („*Polyline*“) koji se proteže duž y osi od $-0,5a$ do $0,5a$. Definiranje napona prema prethodnom izrazu započinje kopiranjem vektora električnog polja na stog (engl. *Stack*) kako je to prikazano slikom 10.79.

Nakon kopiranja vektora električnog polja na stog (engl. *Stack*) potrebno je pod opcijom „Geometry“ odabrati „Polyline“, odnosno krivulju duž koje će se obavljati integracija i kopirati ju na stog (engl. *Stack*) (slika 10.80).

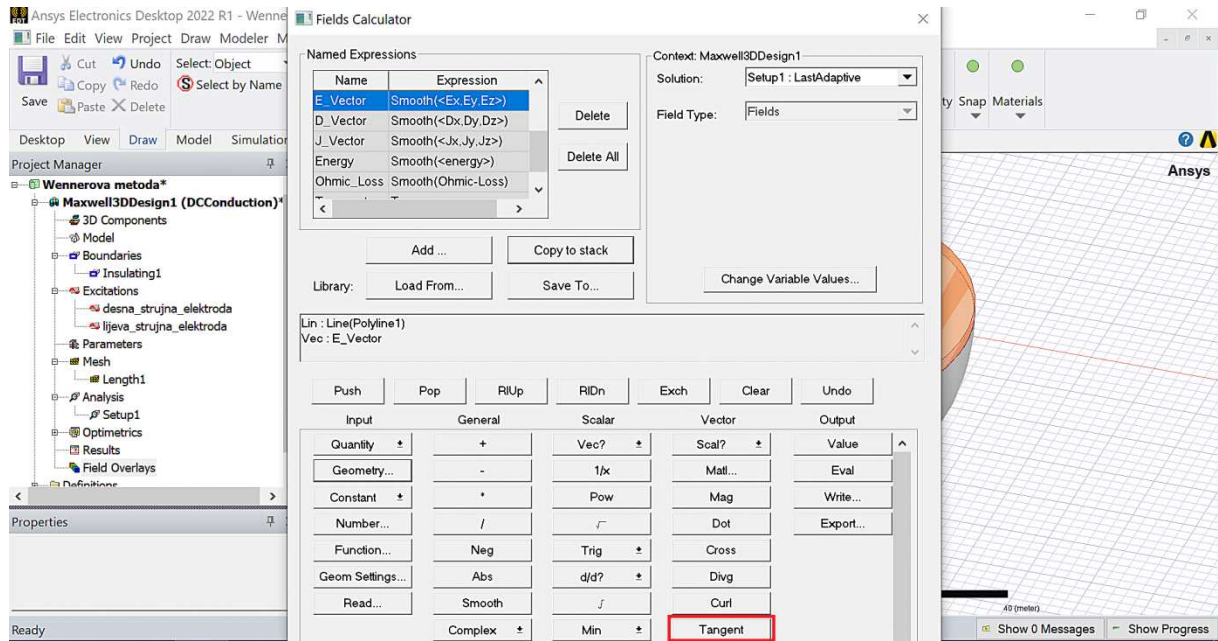


Slika 10.79 Prozor kalkulatora „Calculator“ i kopiranje vektora električnog polja na stog (engl. *Stack*).

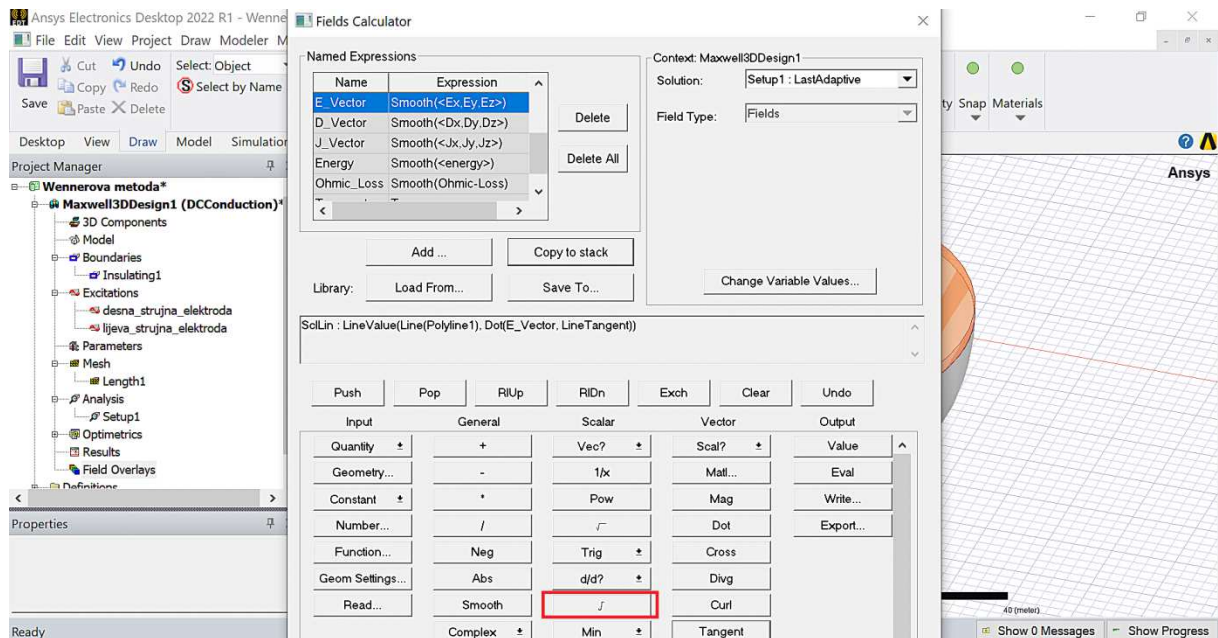


Slika 10.80 Izbor segmenta pravca „Polyline“.

S obzirom da skalarni produkt $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ predstavlja tangencijalnu komponentu električnog polja duž puta pomnoženu s duljinom puta $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_{\tan} \cdot ds$, potrebno je kliknuti na gumb „Tangent“ prikazan na slici 10.81. Nakon klika na gumb „Tangent“ dolazi do promjene na stogu (engl. *Stack*), što je prikazano slikom 10.82. Zadavanje naredbe za integriranje odvija se klikom na gumb na kojemu je znak integrala (slika 10.82).

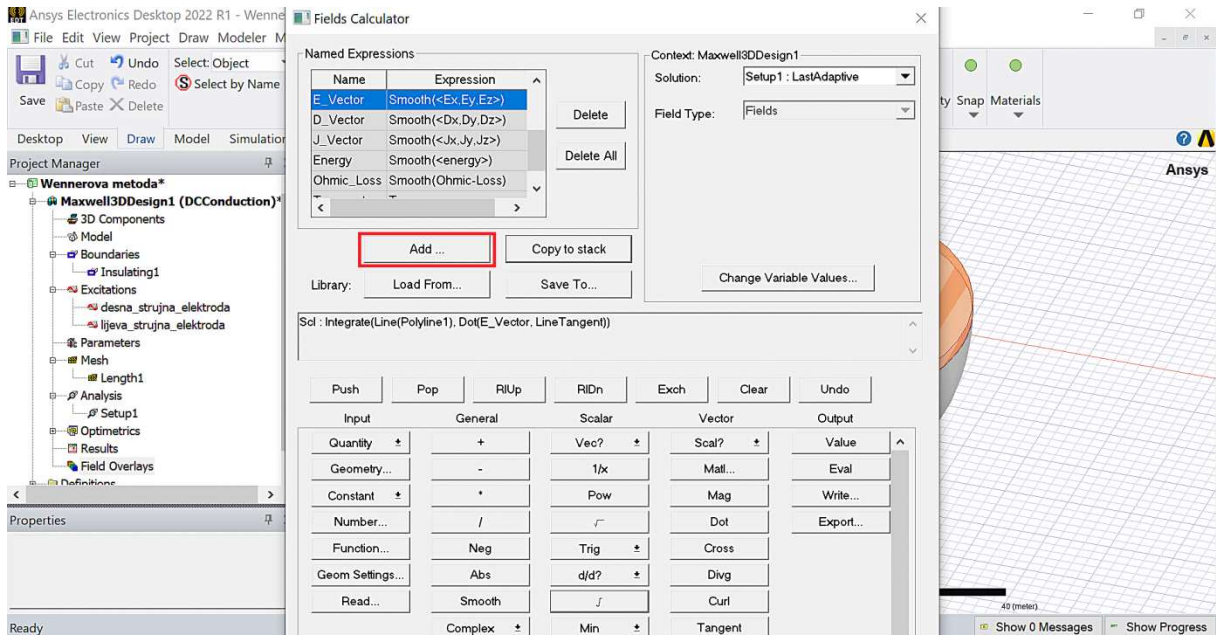


Slika 10.81 Izbor opcije „Tangent“.

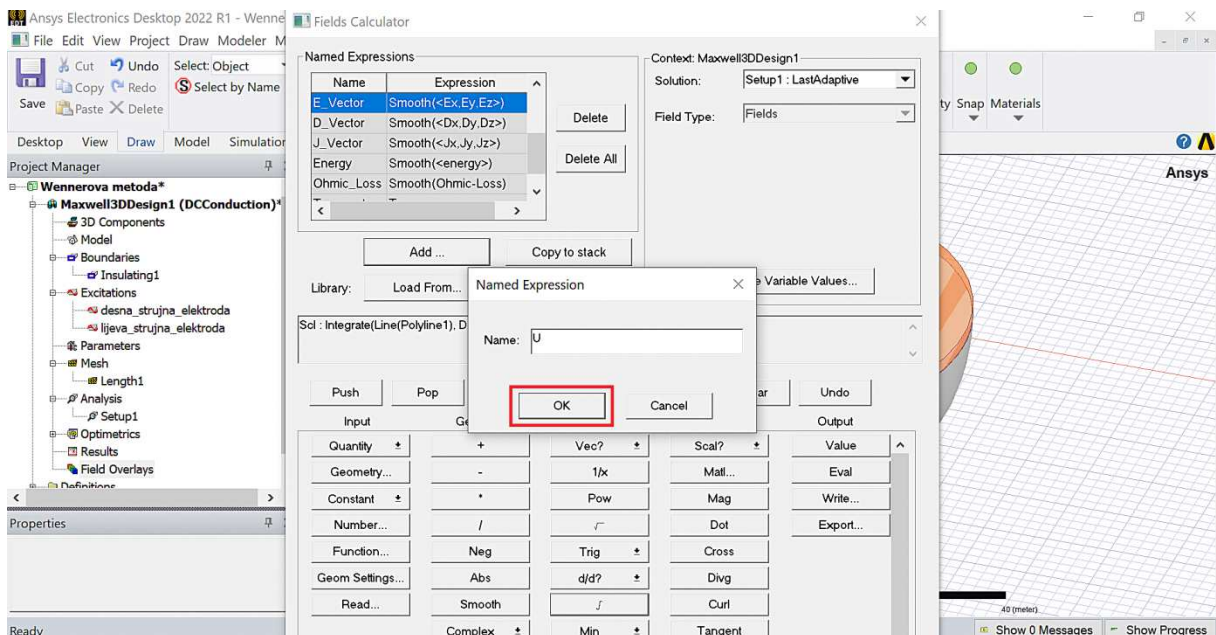


Slika 10.82 Pozicija i izgled gumba za integriranje.

Klikom na gumb sa znakom integrala dolazi do promjene na stogu (engl. *Stack*) na kojemu sadržaj u potpunosti odgovara linijskom integralu danom izrazom (10-2), odnosno naponu U . Stoga se može pristupiti imenovanju skalarne veličine na stogu (engl. *Stack*) kao nove fizikalne veličine koja ima značenje napona U , što se obavlja klikom na gumb pod nazivom „Add“ (slika 10.83). Klikom na gumb pod nazivom „Add“ otvara se prozor prikazan slikom 10.84 u kojemu je potrebno imenovati fizikalnu veličinu koja je na stogu te je zatim potrebno kliknuti na gumb pod nazivom „OK“.

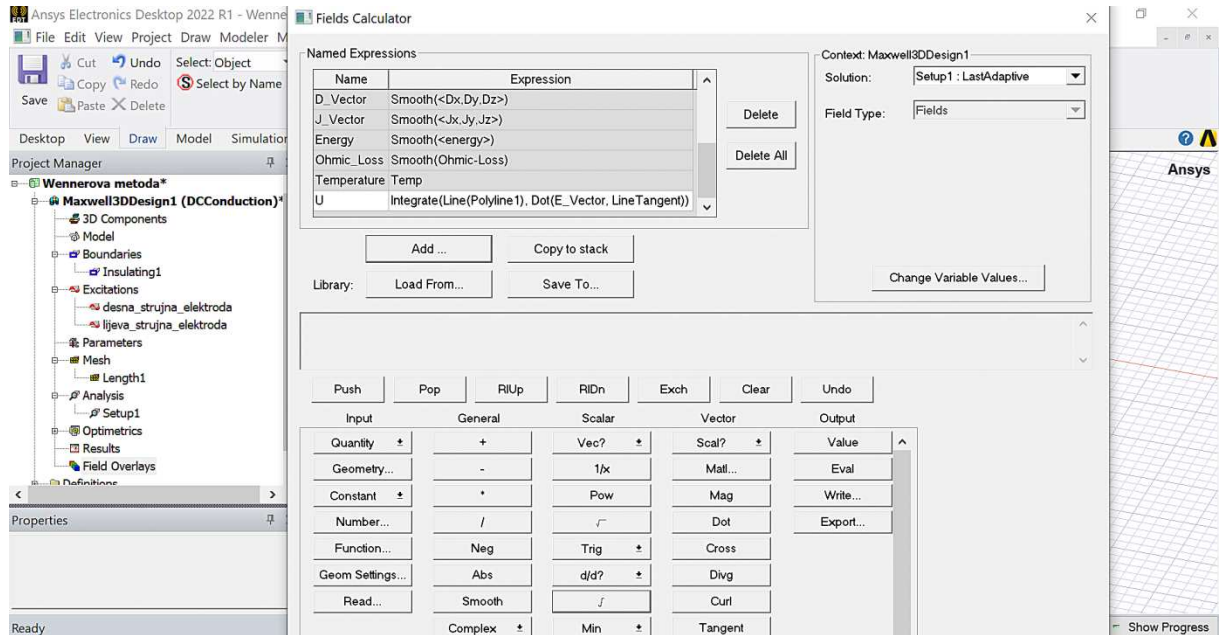


Slika 10.83 Pozicija i izgled gumba pod nazivom „Add“.

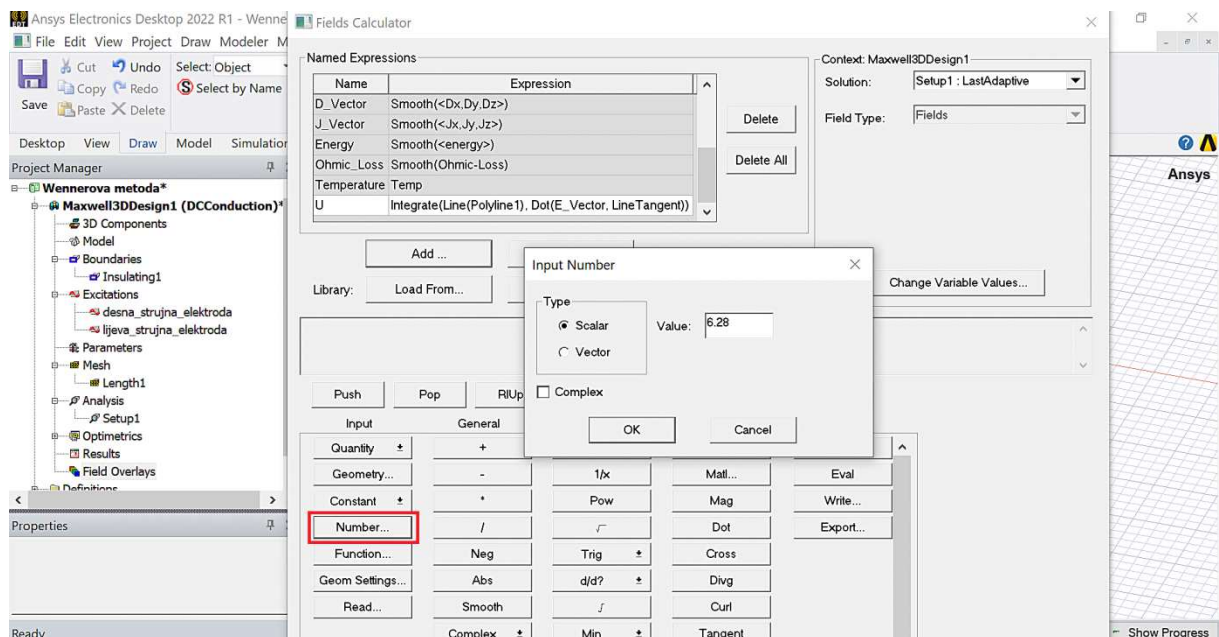


Slika 10.84 Imenovanje skalarne fizikalne veličine na stogu.

Nakon klika na gumb pod nazivom „OK“ može se opaziti da se novodefinirani napon „U“ pojavio u polju imenovanih fizikalnih veličina „*Named Expressions*“ (slika 10.85). Sada, nakon što je definiran napon „U“, može se pristupiti definiranju otpornosti tla prema izrazu (10-1). Postavljanje konstante $2\pi \approx 6.28$ na stog obavlja se izborom opcije „*Number*“, nakon čega se otvara prozor u kojemu se unosi željeni iznosi broja (slika 10.86).

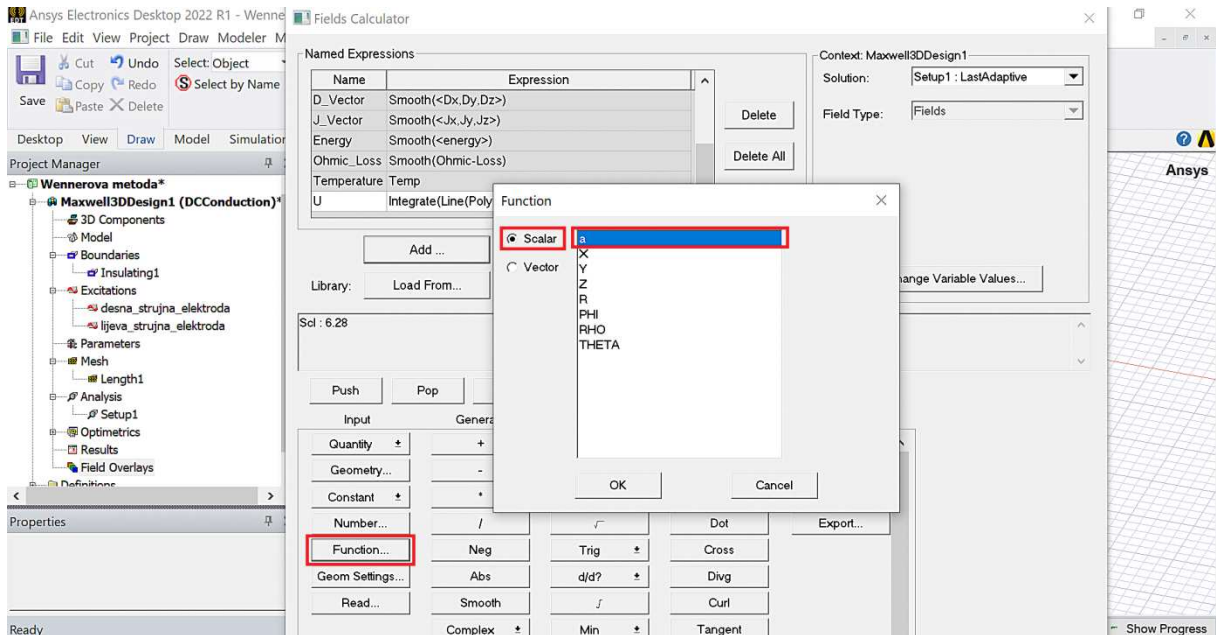


Slika 10.85 Novodefinirani napon „U“ u polju imenovanih fizikalnih veličina.

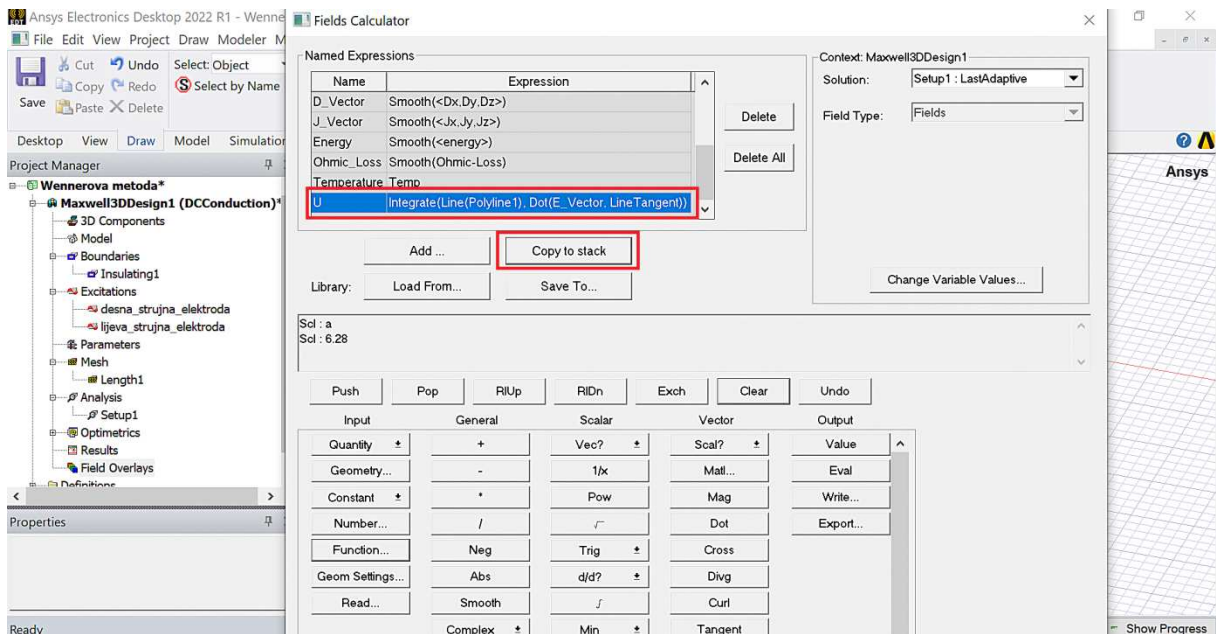


Slika 10.86 Izbor opcije broj (engl. *Number*) i unos željene vrijednosti broja.

Nakon unosa željenog broja (6.28) i klika na gumb pod nazivom „OK“ broj 6.28 pojavljuje se na stogu (slika 10.87). Postavljanje varijable „a“ na stog obavlja se izborom opcije „Function“, nakon čega je potrebno odabrati s popisa skalarnih veličina varijablu „a“ i kliknuti na gumb pod nazivom „OK“. Prijenos napona na stog obavlja se na način da se u polju imenovanih izraza „Named Expressions“ odabere napon te nakon toga klikne na gumb pod nazivom „Copy to Stack“ (slika 10.88).

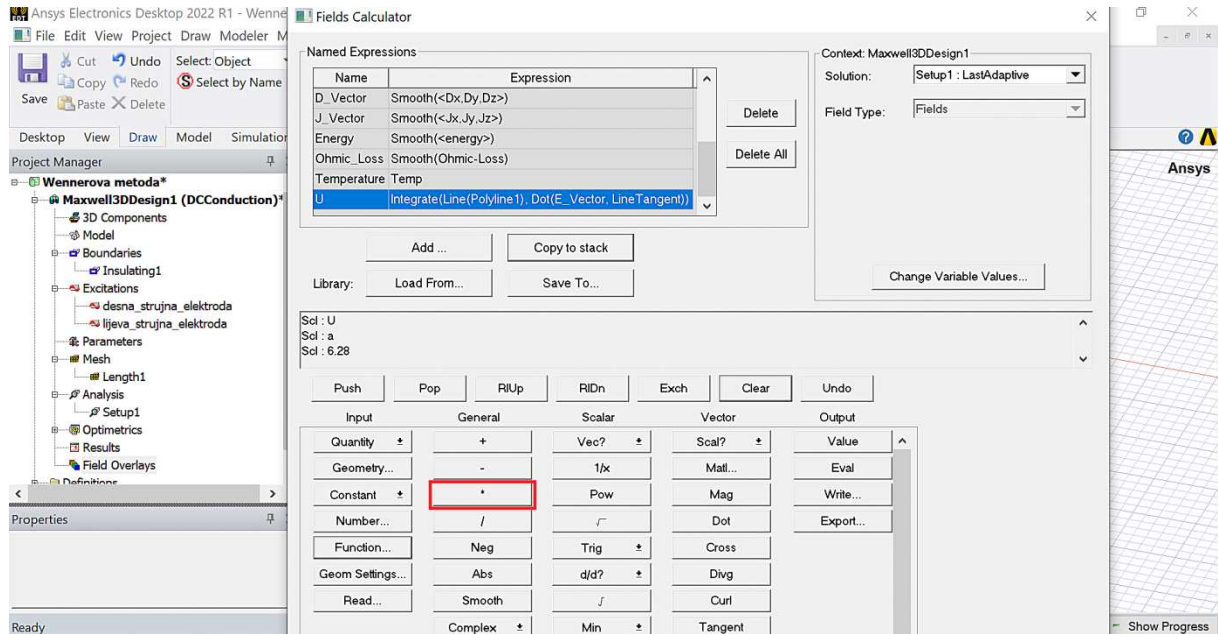


Slika 10.87 Izbor opcije „Function“ i varijable „a“.

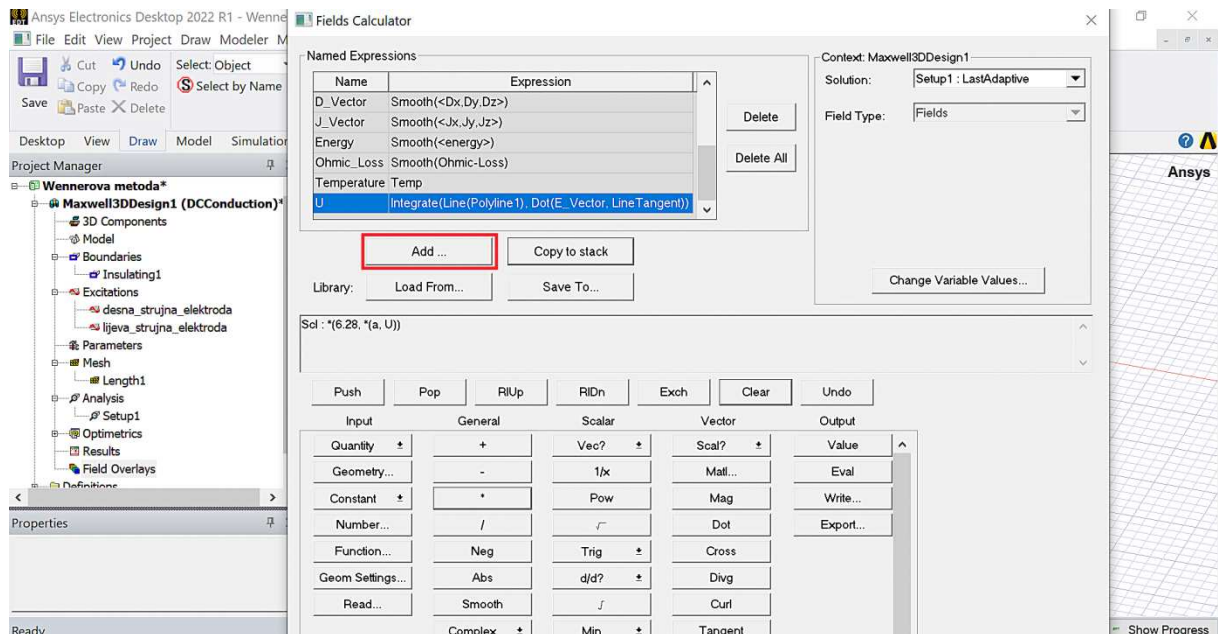


Slika 10.88 Izbor napona (U) u polju imenovanih izraza i njegovo kopiranje na stog.

S obzirom da je prethodno tijekom postavljanja strujnih pobuda postavljen iznos jakosti struje od točno jedan amper, izraz za prividnu otpornost (10-1) pojednostavljuje se i glasi $\rho = 2\pi a \cdot U$. Radi navedenog potrebno je obaviti samo operaciju množenja veličina na stogu, što se obavlja klikom na gumb na kojem se nalazi znak množenja (slika 10.89). Nakon provedenog množenja mijenja se sadržaj stoga (slika 10.90).

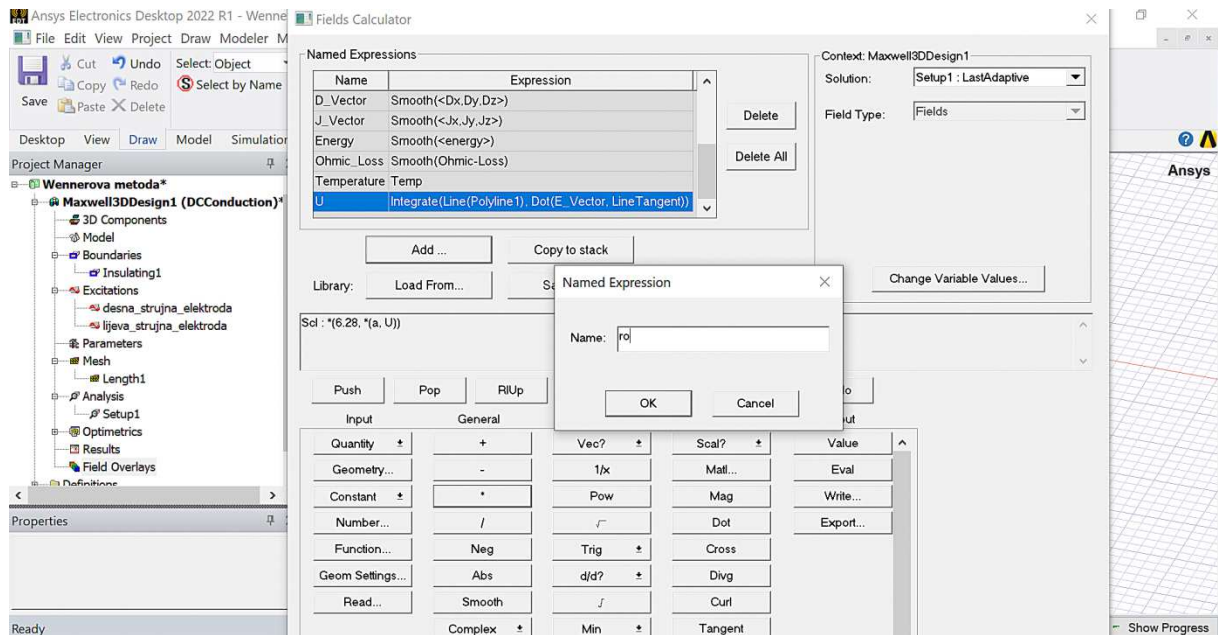


Slika 10.89 Pozicija i izbor gumba za množenje.

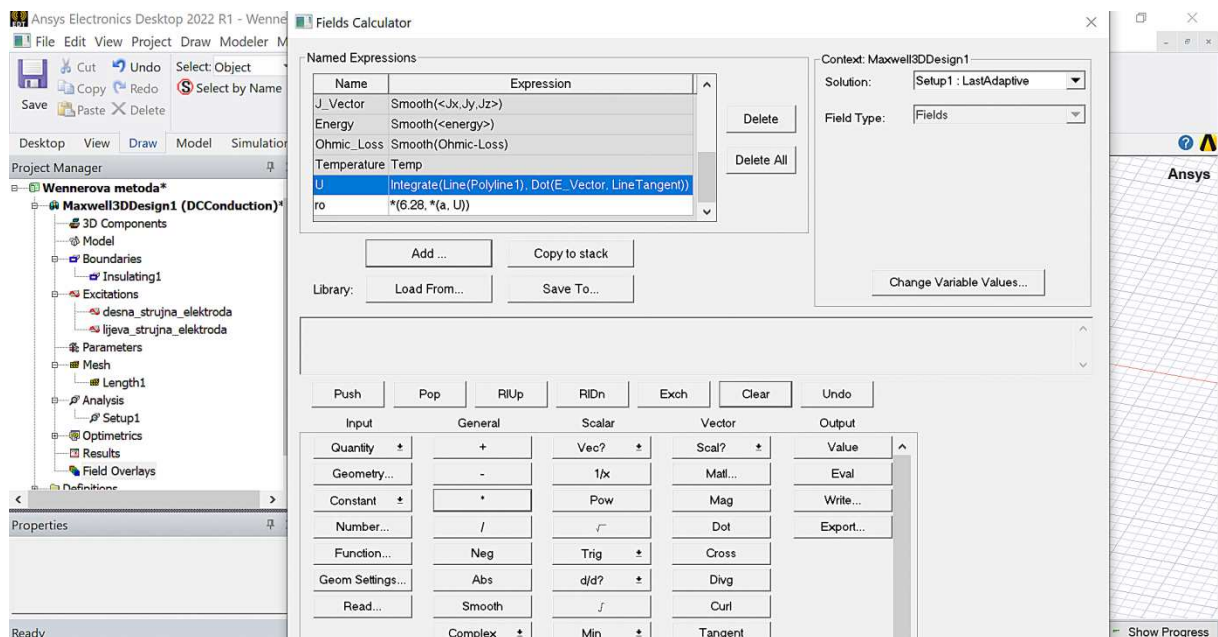


Slika 10.90 Položaj i izbor gumba pod nazivom „Add“.

Nakon klika na gumb pod nazivom „Add“ otvara se prozor prikazan slikom 10.91 u kojemu je potrebno imenovati fizikalnu veličinu koja je na stogu te je zatim potrebno kliknuti na gumb pod nazivom „OK“. S obzirom da se ne može odabrati grčko slovo ρ , prividna je otpornost nazvana „ro“. Nakon klika na gumb pod nazivom „OK“ može se opaziti da se novodefinirana otpornost „ro“ pojavila u polju imenovanih fizikalnih veličina „Named Expressions“ (slika 10.92).

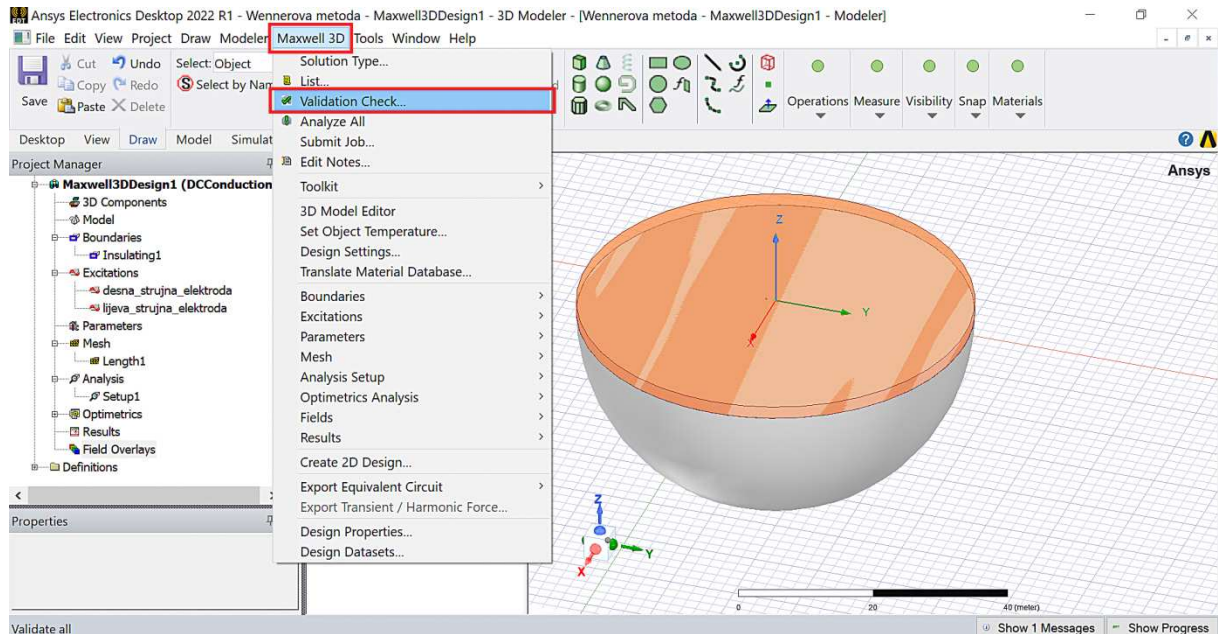


Slika 10.91 Imenovanje skalarne fizikalne veličine na stogu.

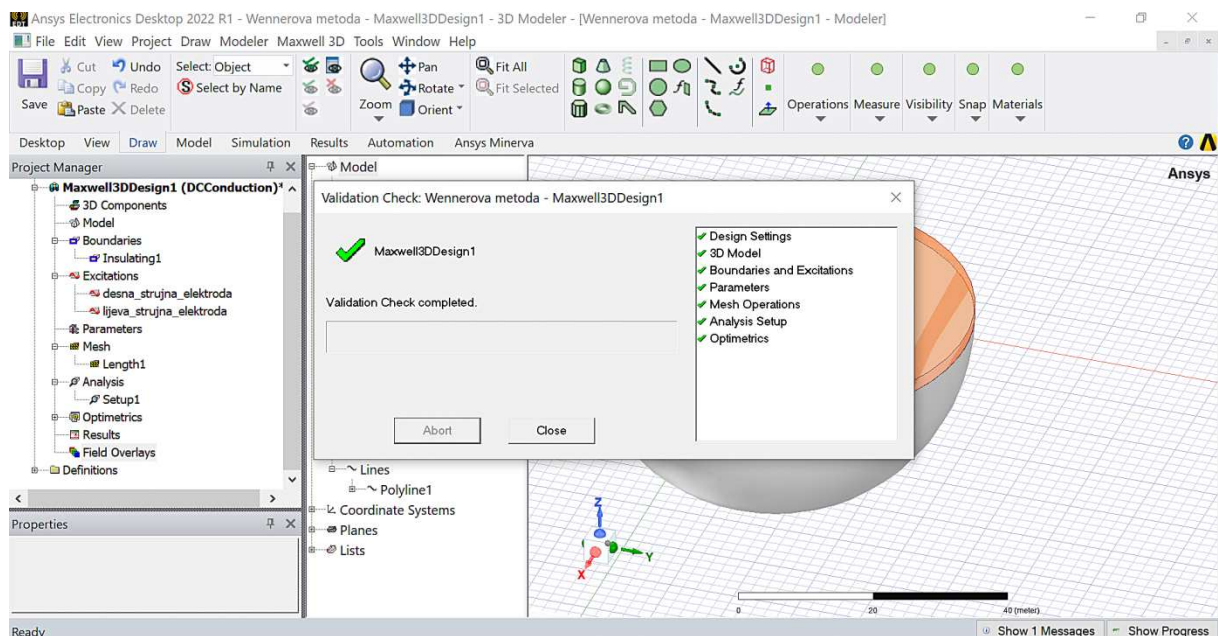


Slika 10.92 Novodefinirana prividna otpornost „ro“ u polju imenovanih fizikalnih veličina.

Posljednji je korak prije pokretanja simulacije, odnosno numeričkog proračuna provjera stavki vezanih uz model. Navedeno se obavlja klikom na „Maxwell 3D“, a zatim na opciju „Validation Check“ (slika 10.93). Nakon navedenog program će provjeriti postavke dizajna, valjanost modela, rubne uvjete i pobude, postavke analize itd. Ukoliko je sve u redu, pojavit će se zelena kvačica ispred svake od navedenih stavki kao što je to prikazano slikom 10.94.

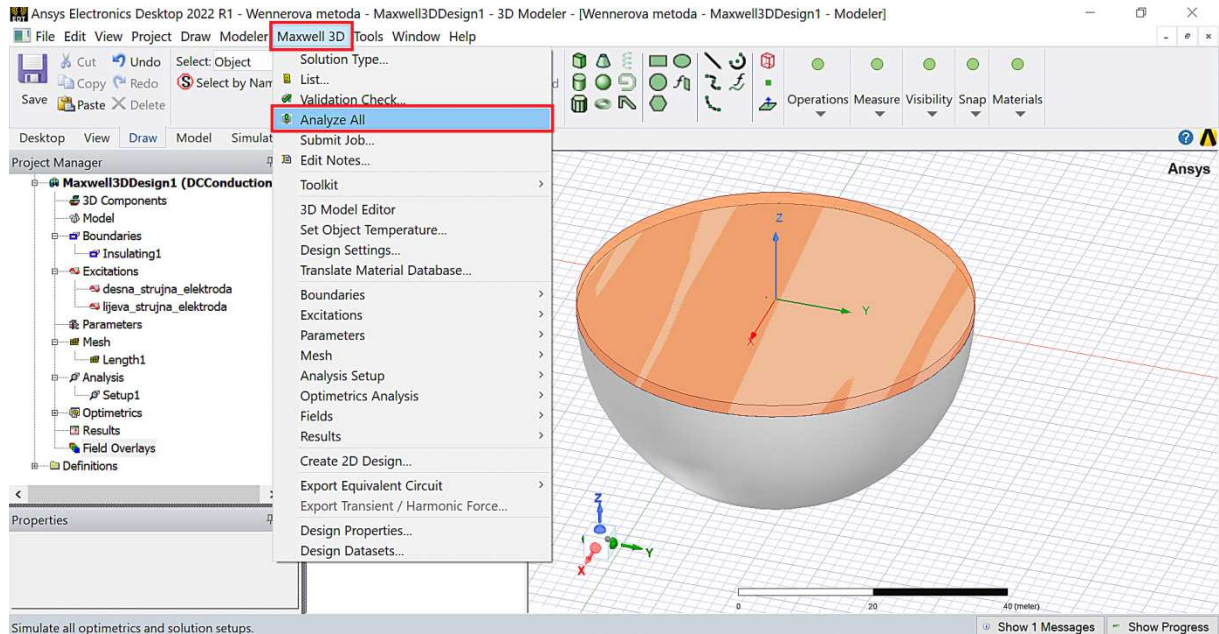


Slika 10.93 Izbor opcije provjere stavki vezanih uz model.

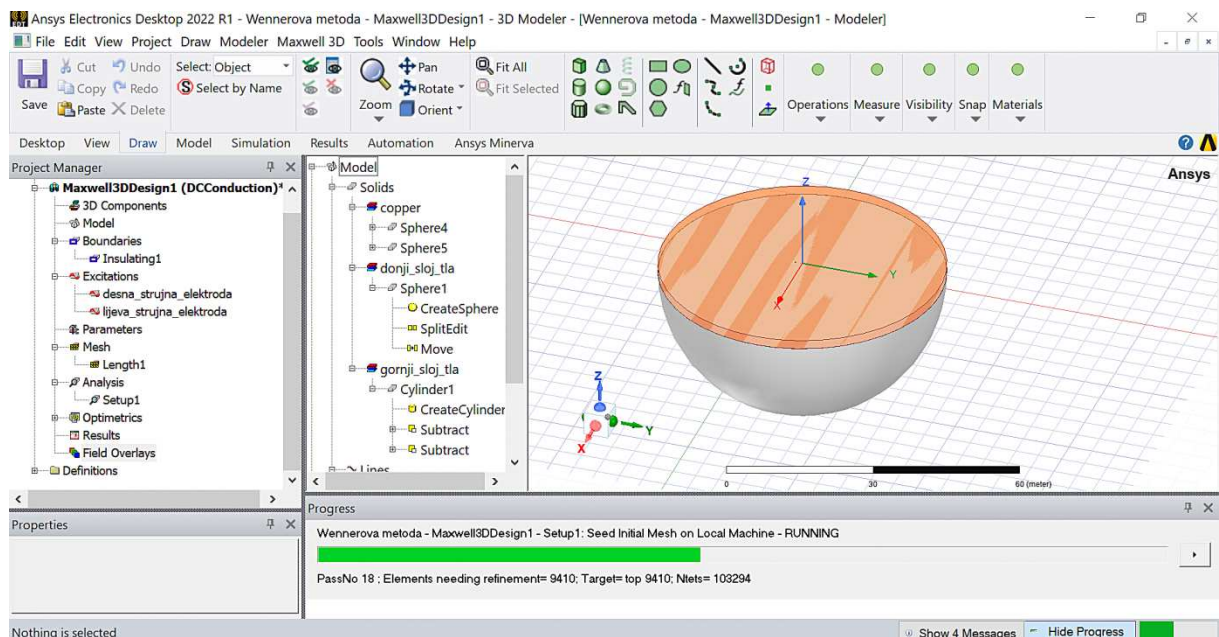


Slika 10.94 Izvještaj nakon provjere svih stavki vezanih uz model.

Nakon što je utvrđeno da su sve stavke vezane uz model valjane može se pokrenuti numerički proračun. Pokretanje numeričkog proračuna obavlja se klikom miša na „*Maxwell 3D*“, a zatim na opciju „*Analyze All*“ kao što je to prikazano slikom 10.95. Nakon što se pokrene numerički proračun primjenom metode konačnih elemenata, potrebno je neko vrijeme da se on obavi. Pojedine faze u odvijanju proračuna, kao i razina njihova izvršenja, vidljive su na dnu prozora u polju pod nazivom „*Progress*“ (slika 10.96).

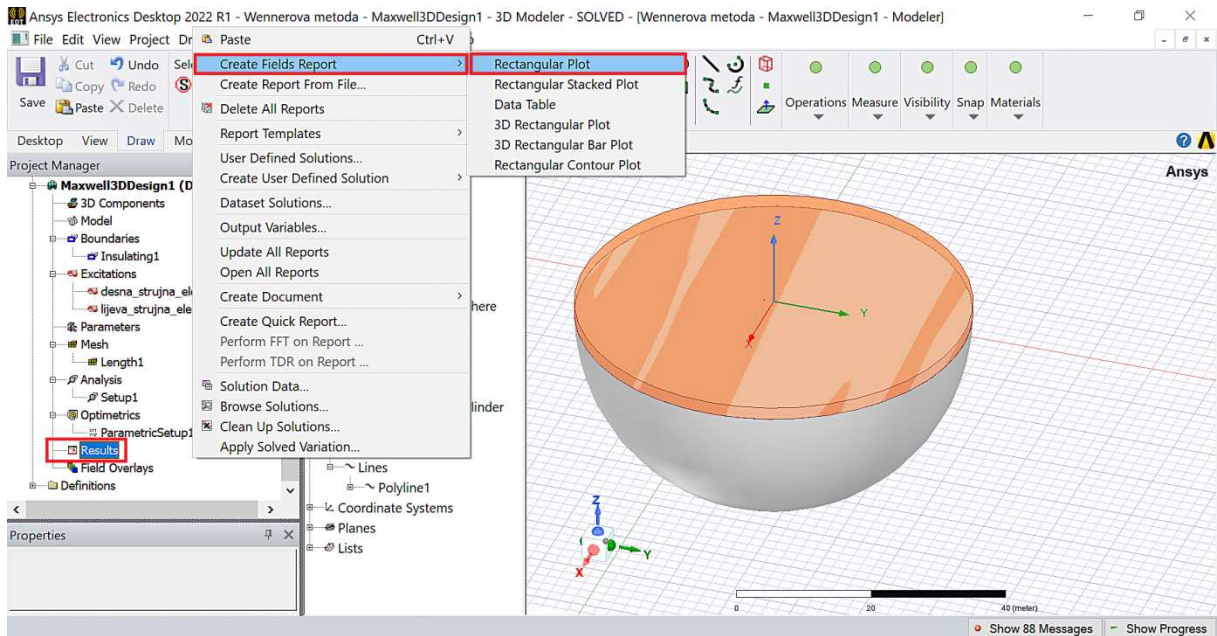


Slika 10.95 Zadavanje naredbe za pokretanje numeričkog proračuna.

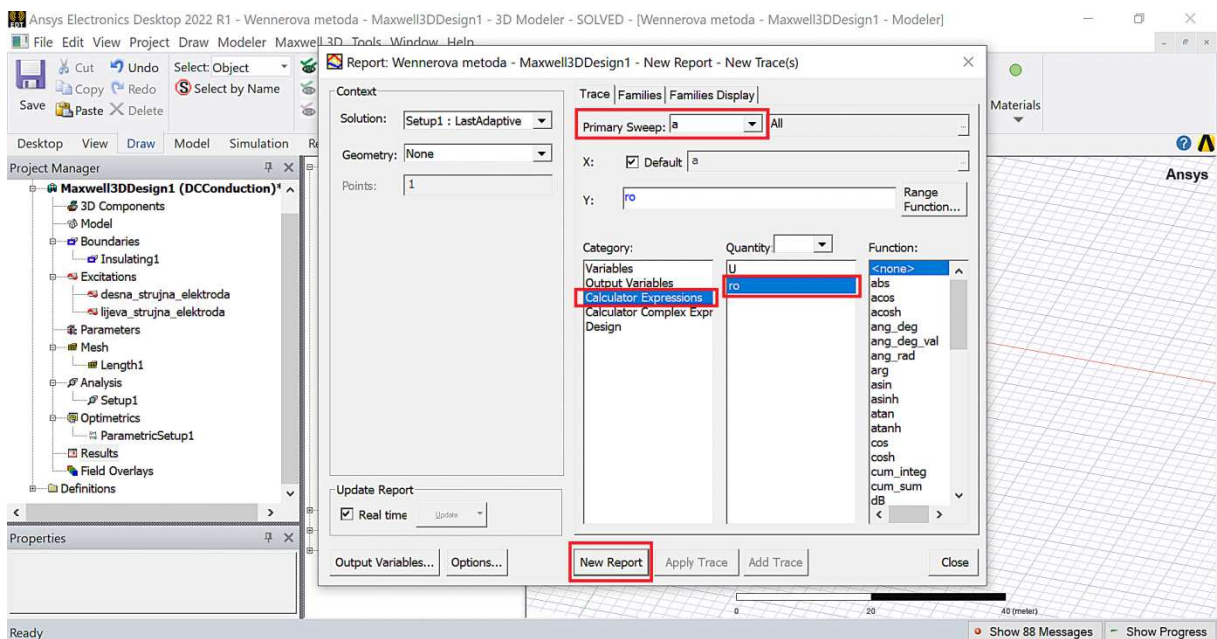


Slika 10.96 Polje „*Progress*“ s osnovnim podacima vezanima uz izvršenje proračuna.

Po završetku numeričkog proračuna može se pristupiti izboru različitih vrsta prikaza rezultata proračuna. U narednom koraku bit će prikazan jedan od brojnih načina prikaza rezultata proračuna. U polju „Project Manager“ odabere se stavka „Results“ te se nakon desnog klika miša otvara izbornik u kojemu se bira opcija „Create Field Report“, a zatim opcija „Rectangular Plot“ (slika 10.97). Nakon navedenog otvara se prozor u kojemu je potrebno odabrati fizikalnu veličinu „ro“, odnosno postaviti izbore na način kako je označeno crvenim pravokutnicima na slici 10.98.

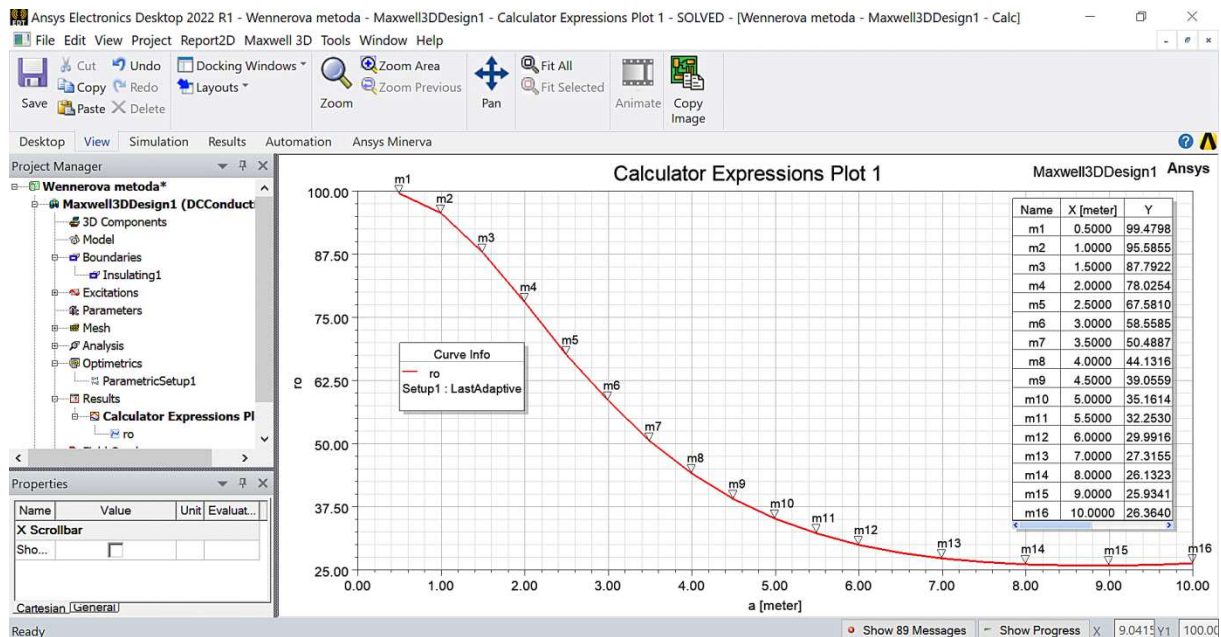


Slika 10.97 Izbor opcije prikaza rezultata pomoću opcije „Rectangular Plot“.



Slika 10.98 Izbor grafičkog prikaza ovisnosti fizikalne veličine „ro“ o varijabli „a“.

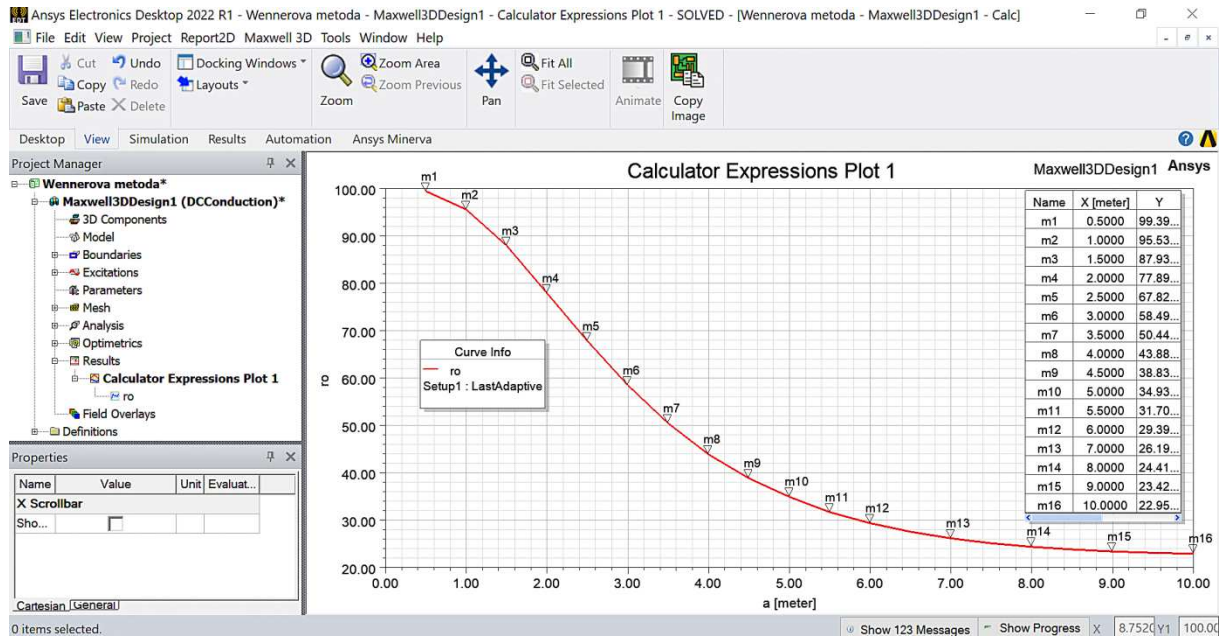
Nakon potvrde prethodnih izbora klikom na gumb pod nazivom „*New Report*“ pojavljuje se grafički prikaz promjene prividne otpornosti tla o varijabli „*a*“, tj. o razmaku između susjednih elektroda (slika 10.99).



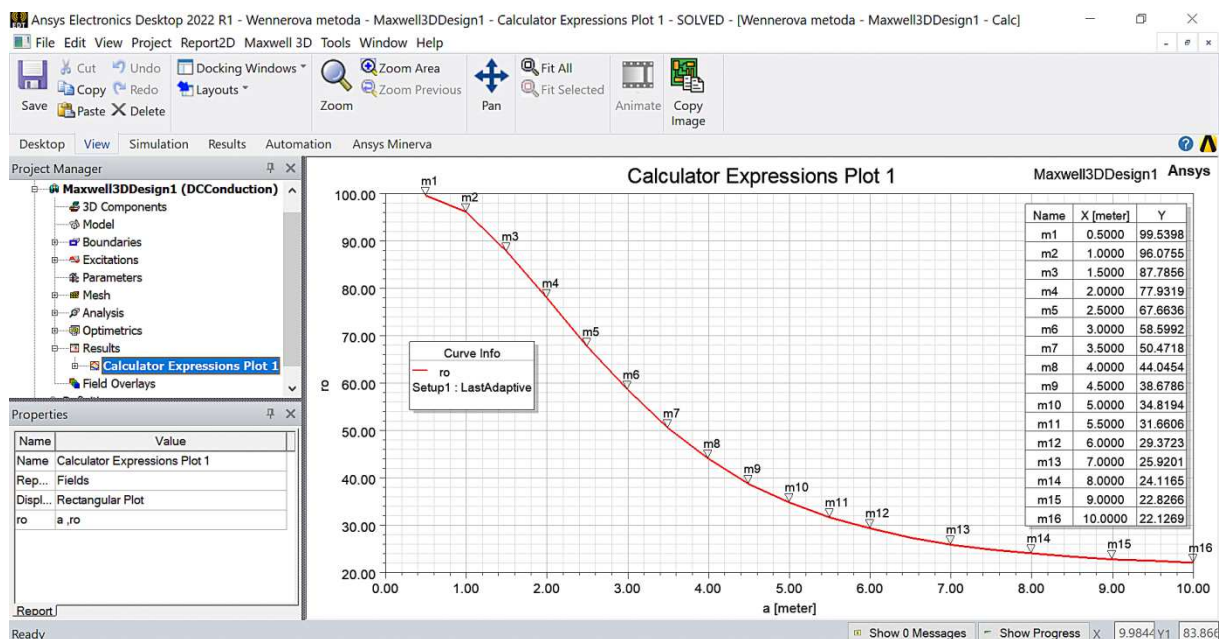
Slika 10.99 Prividna otpornost tla u funkciji razmaka susjednih elektroda. Grafički prikaz dobiven za polumjere gornjeg i donjeg sloja tla od 30 m.

Analizom podataka na slici 10.99 može se uočiti da je opći oblik krivulje prividne otpornosti tla u skladu s teorijskim predviđanjem. Također, iz grafa su uočljivi iznosi horizontalnih asimptota koje odgovaraju iznosima otpornosti gornjeg i donjeg sloja tla. Međutim, varijabla „*a*“ nakon vrijednosti $a=8$ m, umjesto nastavka konvergiranja k vrijednosti $\rho=20 \Omega\text{m}$, počinje divergirati. Naime, da bi se simulacijom na računalu, primjenom metode konačnih elemenata (MKE, engl. *FEM*), dobila krivulja prividne otpornosti tla, koja odgovara teorijski predviđenom obliku i iznosima, radijus tla mora biti puno veći u odnosu na razmak između strujnih elektroda. U ovom primjeru kada je $a=10$ m, razmak između strujnih elektroda iznosi $3a=30$ m, a za radijus tla uzeta je vrijednost od $R=30$ m. Pri najvećem iznosu varijable „*a*“, tj. kada je $a=10$ m, strujne su elektrode praktički priljubljene uz rub modela tla. Radi navedenog, potrebno je povećati radijus tla. Pri povećanju radijusa tla treba imati na umu da će veći radijus tla znatno produljiti trajanje proračuna (veći broj konačnih elemenata) te zahtijevati veće memorijske resurse računala. Stoga pri povećanju radijusa tla treba biti odmjeran. Neka prvo naredno povećanje radijusa tla iznosi $R=50$ m. Rezultati proračuna, odnosno prividna otpornost tla za radijus tla od $R=50$ m prikazani su na slici 10.100. Prema numeričkim podacima otpornosti tla prikazanim na slici 10.100, prividna otpornost tla nastavlja konvergirati prema iznosu otpornosti donjeg sloja tla iznad vrijednosti $a=8$ m, što nije bio slučaj na grafu prividne otpornosti tla prikazanom na slici 10.99.

Daljnje povećanje polumjera gornjeg i donjeg sloja tla poboljšava numeričke rezultate, što je prikazano slikom 10.101. Na slici 10.101 prikazana je prividna otpornost tla u funkciji razmaka susjednih elektroda za slučaj kada su polumjeri gornjeg i donjeg sloja tla od 120 m. Daljnje povećanje polumjera gornjeg i donjeg sloja tla dodatno bi poboljšalo numeričke rezultate. Hardverski resursi računala na kojemu su provedeni prikazani numerički proračuni nisu omogućavali proračune za polumjere gornjeg i donjeg sloja tla većih od 120 m.



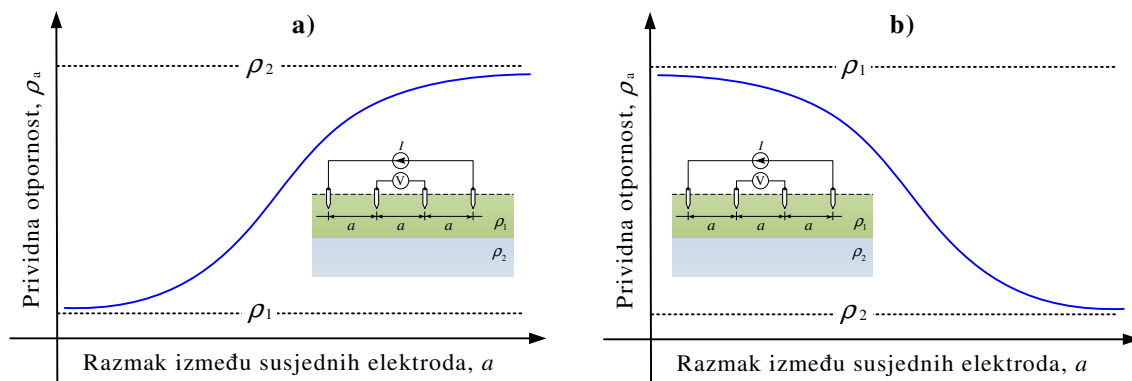
Slika 10.100 Prividna otpornost tla u funkciji razmaka susjednih elektroda. Grafički prikaz dobiven za polumjere gornjeg i donjeg sloja tla od 50 m.



Slika 10.101 Prividna otpornost tla u funkciji razmaka susjednih elektroda. Grafički prikaz dobiven za polumjere gornjeg i donjeg sloja tla od 120 m.

Analiza rezultata

U ovom primjeru prikazano je modeliranje Wennerove metode i dvoslojnog tla korištenjem programskog paketa Ansys. Dobiveni numerički rezultati za prividnu otpornost tla po svom su iznosu i valnom obliku u skladu s iznesenom teorijom u šestom poglavlju ovog priručnika na pod nazivom „Galvanske metode mjerenja otpornosti tla“. Prema iznesenoj teoriji u šestom poglavlju (vidjeti sliku 6.5, tj. sliku 10.102), za male razmake između strujnih elektroda (u odnosu na debljinu gornjeg sloja tla) veći udio struje koja se zatvara kroz tlo protječe gornjim slojem tla, što se odražava u izmjerenoj prividnoj otpornosti koja je brojčano bliska iznosu gornjeg sloja tla. Vrijedi i obrnuto, za velike razmake između strujnih elektroda (u odnosu na debljinu gornjeg sloja tla) veći udio struje koja se zatvara kroz tlo protječe donjim slojem tla, što se odražava u izmjerenoj prividnoj otpornosti koja je brojčano bliska iznosu donjeg sloja tla.



Slika 10.102 Ovisnost prividne otpornosti dvoslojnog tla o razmaku između elektroda kada je a) gornji sloj tla manje otpornosti od donjeg sloja tla, b) kada je gornji sloj tla veće otpornosti od donjeg sloja tla.

Za daljnji rad i vježbu!

U prikazanom primjeru korištena je automatizacija numeričkog proračuna korištenjem opcija „Optimetrics“ i „Parametric“ pomoću kojih je varijabla „ a “ (razmak između susjednih elektroda) automatski mijenjana prema definiranom obrascu. Koristeći se opcijama „Optimetrics“ i „Parametric“ može se načiniti složenija shema automatizacije numeričkog proračuna u kojemu se, uz promjenu varijable „ a “, mijenja i debljina gornjeg sloja tla. Na taj se način može dobiti porodica krivulja prividne otpornosti tla za različite debljine gornjeg sloja tla, što može biti od koristi pri interpretaciji mjernih rezultata. Čitatelja se upućuje da po završetku ove vježbe proširi model koristeći se opcijama „Optimetrics“ i „Parametric“ za definiranje debljine gornjeg sloja tla kao varijable „ h “ koja se mijenja od 0,5 m do 2,0 m, u koracima od 0,5 m, te da porodicu krivulja prividne otpornosti tla za različite debljine gornjeg sloja tla prikaže združeno na jednoj slici.

POPIS KORIŠTENIH OZNAKA, KRATICA I SIMBOLA

U nastavku priručnika dan je popis korištenih oznaka, kratica i simbola u priručniku. Popis je uređen prema latinično-grčkom alfabetu. Neke od oznaka, kratica i simbola imaju višestruka značenja, što je navedeno u komentaru.

Popis korištenih oznaka, kratica i simbola.

Oznaka/Kratice/Simbol	Komentar
A	Konstanta koja se određuje iz rubnog uvjeta
a	Razmak između susjednih elektroda
\vec{a}_r	Jedinični vektor
α	Koeficijent atenuacije, prigušna konstanta
B	Konstanta koja se određuje iz rubnog uvjeta
b	Duljina ukopanog dijela elektrode
BEM	engl. <i>Boundary element method</i>
\vec{B}	Vektor gustoće magnetskog toka
β	Fazna konstanta
C	Kapacitet, konstanta koja se određuje iz rubnog uvjeta
C_1	Jedinični kapacitet
C_m	Međusobni kapacitet
$C_{m,1}$	Jedinični međusobni kapacitet
C_p	Pogonski kapacitet
C_z	Dozemni kapacitet (kapacitet prema zemlji)
$C_{z,1}$	Jedinični dozemni kapacitet
D	Razmak, promjer (dijametar)
d	Razmak
E	Jakost električnog polja
\vec{E}	Vektor električnog polja
ϵ_0	Permitivnost vakuuma
ϵ_r	Relativna permitivnost
FEM	engl. <i>Finite element method</i>
FDM	engl. <i>Finite-difference methods</i>
FVM	engl. <i>Finite volume method</i>
φ	Skalarni električni potencijal
$\varphi(r)$	Potencijal na radijalnoj udaljenosti r
φ_k	Iznos potencijala u k -tom čvoru
φ_{P1}	Potencijal elektrode P1
φ_{P2}	Potencijal elektrode P2
φ_s	Potencijal na kojemu se nalazi sustav tijekom kvara

Popis korištenih oznaka, kratica i simbola (nastavak).

Oznaka/Kratica/Simbol	Komentar
φ_{stopala}	Potencijal na poziciji stopala
φ_{s1}	Potencijal na poziciji stopala broj 1
φ_{s2}	Potencijal na poziciji stopala broj 2
$\varphi_{\text{uzemljivača}}$	Potencijal uzemljivača
φ_{ref}	Potencijal beskonačno daleke referentne točke
G	Električna vodljivost, geometrijski faktor
G_1	Jedinična vodljivost
Γ	Segment granice domene
γ	Kompleksna konstanta prostiranja
h	Visina vodiča u odnosu na tlo, debljina gornjeg sloja tla
I	Jakost struje
I_{C1}	Jakost struje strujne elektrode C1
I_{C2}	Jakost struje strujne elektrode C2
I'_{C1}	Jakost struje slike strujne elektrode C1
I'_{C2}	Jakost struje slike strujne elektrode C2
$i(x,t)$	Struja duž prijenosnog voda u trenutku t na poziciji x
\underline{I}_1	Fazor struje na početku prijenosnog voda
\underline{I}_2	Fazor struje na završetku prijenosnog voda
\vec{j}	Vektor gustoće struje
\vec{j}_1	Vektor gustoće struje u mediju 1
\vec{j}_2	Vektor gustoće struje u mediju 2
J'	Gustoća struje na površini ukopanog dijela uzemljivača
K	Faktor, koeficijent odslikavanja
L	Duljina cjevastog vodiča
l_v	Duljina prijenosnog voda, duljina vodiča
L_1	Jedinični induktivitet
λ	Linijska gustoća naboja
λ_A	Linijska gustoća naboja vodiča A
λ_B	Linijska gustoća naboja vodiča B
MKR	Metoda konačnih razlika
MKE	Metoda konačnih elemenata
MKV	Metoda konačnih volumena
ML	Metoda linija
MM	Metoda momenata
MGE	Metoda graničnih elemenata
MoM	engl. <i>Method of moments</i>
N	Broj uvažanih odslikavanja
n	Cijeli broj
\vec{n}	Normala (vektor normale)
$\partial\Omega$	Granica domene, rub domene

Popis korištenih oznaka, kratica i simbola (nastavak).

Oznaka/Kratica/Simbol	Komentar
Ω	Domena, ohm
$p\%$	Postotna pogreška
r	Radijalna udaljenost
R_1	Jedinični djelatni otpor
R_a	Polumjer (radijus) polukugle
R_{ab}	Otpor slojeva tla između točke „a“ i točke „b“
R_b	Polumjer (radijus) polukugle
R_u	Otpor rasprostiranja uzemljivača
R_∞	Otpor rasprostiranja uzemljivača u tlu beskonačnih dimenzija
r_v	Polumjer (radijus) vodiča
ρ	Otpornost
$\rho_{\text{apparent}}(a)$	Prividna otpornost
ρ_{tla}	Otpornost tla
ρ_1	Otpornost gornjeg sloja tla
ρ_2	Otpornost donjeg sloja tla
ρ_{zraka}	Otpornost zraka
S	Površina zamišljene polukugle
S'	Površina ukopanog dijela uzemljivača
$S_k(x)$	Oblikovna funkcija (k -ta oblikovna funkcija)
σ	Površinska gustoća naboja, električna vodljivost
U_{ab}	Napon između točke „a“ i točke „b“
U_{ba}	Napon između točke „b“ i točke „a“
U_d	Napon dodira (dodirni napon)
U_0	Napon elektrode
U_k	Napon koraka
$U_{\text{uzemljivača}}$	Napon uzemljivača
\underline{U}_1	Fazor napona na početku prijenosnog voda
\underline{U}_2	Fazor napona na završetku prijenosnog voda
$u(x, t)$	Napon na prijenosnom vodu u trenutku t na poziciji x
U_v	Napon izmjeren voltmetrom
x	Prostorna varijabla
y	Prostorna varijabla
q	Količina naboja
\underline{Y}_1	Jedinična poprečna admitancija
z	Prostorna varijabla
\hat{z}	Jedinični vektor
\underline{Z}_1	Jedinična uzdužna impedancija
\underline{Z}_0	Karakteristična impedancija prijenosnog voda